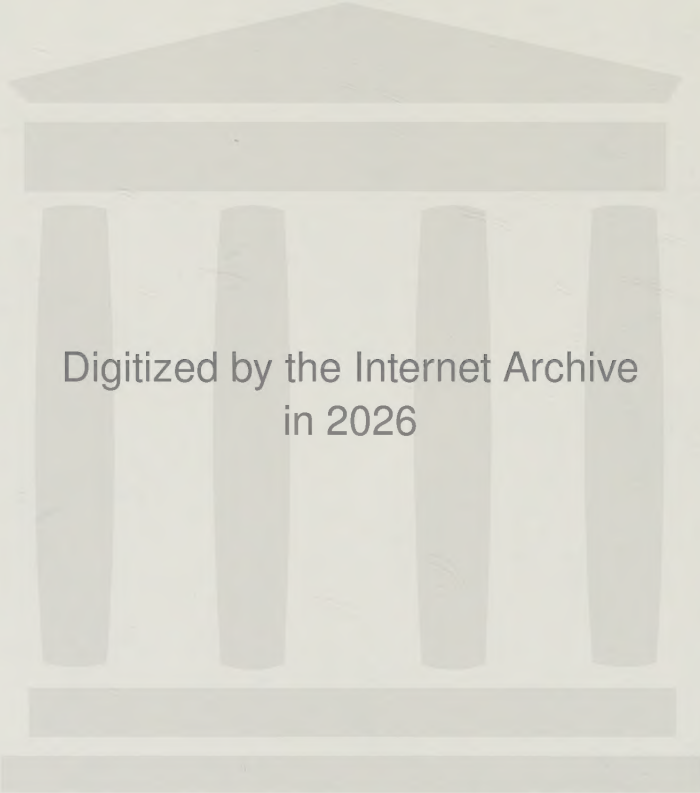


»KONVERGENZSÄTZE FÜR BRANCHING RANDOM WALKS«

Dissertation
zur Erlangung des Grades
»**Doktor der Naturwissenschaft**«
am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg - Universität in Mainz

Norbert Lenz
geb. in Königshofen a. d. Heide
Mainz 1981

1982



Digitized by the Internet Archive
in 2026

»KONVERGENZSÄTZE FÜR BRANCHING RANDOM WALKS«

Dissertation
zur Erlangung des Grades
»Doktor der Naturwissenschaft«
am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg - Universität in Mainz

Norbert Lenz
geb. in Königshofen a. d. Heide
Mainz 1981



Dekan: Prof. Dr. H. N. Mülthei

1. Berichterstatter: Prof. W. Bühler, Ph. D.

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. - J. Schuh

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Juni 1982

Inhalt

	Seite
0. Vorbemerkung	1
1. Einführung	3
2. Konvergenz im r -ten Mittel gegen W^0	6
3. Fast sichere Konvergenz gegen W^0	9
4. Faltungsinverse und die Prozesse $\{U_n(a)\}$	18
5. Konvergenz gegen $W(s_a)$	25
6. Compound - Poisson Konvergenz auf Galton-Watson Bäumen	42
7. Verzeichnis der wichtigsten verwendeten Symbole	46
8. Zusammenfassung	48
9. Literatur	49

0. Vorbemerkung

Bei einem Branching Random Walk $\mathcal{Z}$ besteht die nullte Generation aus einem Urahn, der die Position 0 hat. Die Nachfahren des Urahns bilden die erste Generation. Die Positionen der Individuen der ersten Generation sind durch einen Punktprozeß Z_1 auf $\mathbb{R}$ gegeben. Diese Positionen werden mit $z_{1,j}$ bezeichnet. Sei $\mathcal{F}_n$ die Sigmaalgebra, die von den Geburten der Generationen $0, 1, \dots, n$ erzeugt wird und seien $z_{n,i}$ die Positionen der Individuen der n -ten Generation. Jedes Individuum der n -ten Generation erzeugt unabhängig voneinander und unabhängig von $\mathcal{F}_n$ Nachkommen der $n+1$ -ten Generation. Die Positionen der Nachfahren eines Individuums, das sich in $z_{n,i}$ befindet, sind durch einen Punktprozeß iZ_{n+1} gegeben. Dabei ist iZ_{n+1} wie der Punktprozeß verteilt, der die Atome $\{z_{1,j} + z_{n,i}\}$ besitzt.

Der Branching Random Walk ist insbesondere ein allgemeiner Verzweigungsprozeß, der in Harris [12], Ch. III behandelt wird.

Die räumliche Position eines Individuums kann auf viele Weisen interpretiert werden. Bramson [8] bezeichnet sie als Dynastie, wenn Z_1 auf $\{0, 1\}$ konzentriert ist. Man kann darunter auch die Geburtszeit eines Individuums in einem altersabhängigen Verzweigungsprozeß vom Crump - Mode Typ verstehen, wenn Z_1 auf $[0, \infty)$ konzentriert ist. Oder man faßt die räumliche Position als Typ auf und kann so Aussagen über das Verhalten von Mehrtypprozessen mit überabzählbar unendlich vielen Typen bekommen.

Kingman [15] sowie Biggins [6] und [7] behandeln verschiedene Fragestellungen des allgemeinen, hier zugrundeliegenden Modells. Die anderen unten aufgeführten Autoren setzen zusätzlich voraus, daß die räumliche Ausbreitung unabhängig von der Populationsentwicklung stattfindet.

Kingman [15] und Bramson [8] untersuchen unter verschiedenen Voraussetzungen das Verhalten von $\min_i \{z_{n,i}\}$ für $n \rightarrow \infty$. Biggins [6] beschäftigt sich mit Eigenschaften der

Martingale $W_n(s) = \int e^{-sx} dZ_n(x) / E \int e^{-sx} dZ_n(x)$,

wobei $Z_n(x) = \sum_i 1_{(-\infty, x]}(z_{n,i})$

ist. In [7] beweist Biggins einen Satz über das Konvergenzverhalten von $(Z_n(nx))^{1/n}$ für $n \rightarrow \infty$. Bei Asmussen / Kaplan [2] sind Aussagen über fast sichere Konvergenz zu finden, die dem zentralen Grenzwertsatz entsprechen. In ihrem Artikel [1] sind analoge Aussagen für die Konvergenz im quadratischen Mittel enthalten. Weiterhin beweisen sie einen Satz über die Konvergenz von $Z_n(a) / EZ_n(a)$ im quadratischen Mittel für den Fall, daß Z_1 auf $[0, \infty)$ konzentriert ist. Das zugehörige fast sichere Konvergenzproblem wurde bisher nur von Kesten / Stigum [14] für den Fall gelöst, daß Z_1 auf $\mathbb{N}_0$ konzentriert ist. Asmussen / Kaplan [1] weisen darauf hin, daß die Untersuchung des Falles Z_1 auf $[0, \infty)$ konzentriert von Interesse ist, da dann $\{Z_n(x) ; x \in [0, a]\}$ als kontinuierliches Analogon zu einem reduzierbaren Mehrtyp - Galton - Watson Prozeß angesehen werden kann.

In dieser Arbeit wird das Konvergenzverhalten von $Z_n(a_n) / EZ_n(a_n)$ für verschiedene Folgen $\{a_n\}$ untersucht. In den Abschnitten 1 bis 4 wird dabei Z_1 auf $[0, \infty)$ konzentriert vorausgesetzt. In Abschnitt 4 wird eine neue Normierung von $Z_n(a)$ durch Faltung vorgenommen. In Abschnitt 5 wird ein Zusammenhang zwischen $Z_n(a) / EZ_n(a)$ und den Martingalen $W_n(s)$ hergestellt. Schließlich wird in Abschnitt 6 ein Konvergenzsatz für die Compound - Poisson Konvergenz einer Folge von Branching Random Walks bewiesen. Dieser Abschnitt beinhaltet eine Verallgemeinerung der Aussagen von Moncayo [17].

1. Einführung

Allgemeine Voraussetzungen und Bezeichnungen:

Offensichtlich ist $Z_n(\infty) = \sum_{i=1}^{\infty} z_{n,i}$ ein Galton - Watson Prozeß. Es sei stets vorausgesetzt, daß ein $r \in (1,2]$ existiert mit $E(Z_1(\infty))^r < \infty$. Sei $m = EZ_1(\infty) > 1$ und $G(x) = EZ_1(x)$. G ist damit die Verteilungsfunktion eines Maßes mit Gesamtmasse m . Da $Z_1(\cdot)$ rechtsstetig ist, ist auch G rechtsstetig. Klar ist weiterhin $E(\sum_{i=1}^{\infty} z_{n+1,i}(x) \mid \mathcal{F}_n) = G(x - z_{n,i})$.

Sei h eine Borel - meßbare Funktion. Wegen Harris [12], Ch. III, 4. und 9.1 ist $\int h(x) dZ_n(x)$ eine Zufallsvariable mit $E \int h(x) dZ_n(x) = \int h(x) dEZ_n(x)$. Aus

$$\begin{aligned} E(\sum_{i=1}^{\infty} z_{n+1,i}(x) \mid \mathcal{F}_n) &= E(\sum_{i=1}^{\infty} i z_{n+1,i}(x) \mid \mathcal{F}_n) = \sum_{i=1}^{\infty} G(x - z_{n,i}) \\ &= \int G(x-y) dZ_n(y) \end{aligned}$$

folgt durch Induktion

$$E \sum_{i=1}^{\infty} z_{n+1,i}(x) = G^{*n}(x).$$

G^{*n} wird stets mit G_n bezeichnet, $G_0 = 1_{[0,\infty)}$.

In den Abschnitten 1 bis 4 sei stets vorausgesetzt, daß G auf $[0,\infty)$ konzentriert ist und $G(0) > 1$ ist. Die Zufallsvariablen $Z_n(0)$ bilden dann einen superkritischen Galton - Watson Prozeß.

Die genannten Voraussetzungen seien stets gegeben. Sie werden deshalb bei den einzelnen Sätzen nicht extra aufgeführt. Nur wenn in einem Beweis andere als diese generell gemachten Voraussetzungen benötigt werden, wird darauf besonders hingewiesen. Das Ende eines Beweises wird mit $\square$ gekennzeichnet.

Satz 1.1 Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariable, $S_m = X_1 + \dots + X_m$ und $E|X_i|^s < \infty$ für ein $s \in [1,2]$. Wenn für $m \in \{1, \dots, n-1\}$ $E(X_{m+1} \mid S_m) = 0$ fast sicher gilt, so folgt

$$(1.1) \quad E|S_n|^s \leq 2 \sum_{i=1}^n E|X_i|^s.$$

Beweis: Siehe Bahr / Esseen [5]. $\square$

Satz 1.2: Für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ und $a \geq 0$ gilt

$$(1.2) \quad E | Z_n(a) - (G * Z_{n-1})(a) |^r \leq 2(E(Z_1(\infty)))^r + m^r) G_{n-1}(a)$$

$$(1.3) \quad E \left| \frac{Z_n(a)}{G_n(a)} - \frac{(G_{n-k} * Z_k)(a)}{G_n(a)} \right|^r \leq \frac{4(E(Z_1(\infty)))^r + m^r}{G(0)^r - G(0)} \cdot \frac{1}{G(0)^{(r-1)k}}.$$

Beweis: Seien $\{i z_{n,j}\}$ die Atome von $i Z_n$. Da G auf $[0, \infty)$ konzentriert ist, gilt stets

$$(1.4) \quad i Z_n(a) = \sum_j 1_{(-\infty, a]}(i z_{n,j}) \leq \sum_j 1_{(-\infty, a]}(z_{n-1,i}) = 1_{(-\infty, a]}(z_{n-1,i}) \cdot i Z_n(\infty).$$

Daraus folgt $E | Z_n(a) - (G * Z_{n-1})(a) |^r$

$$\begin{aligned} &= E E \left(\left| \sum_i (i Z_n(a) - G(a - z_{n-1,i})) \right|^r \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right) \\ &\stackrel{(1.1)}{\leq} 2 \cdot E \sum_i E((i Z_n(a))^r + (G(a - z_{n-1,i}))^r \middle| \mathcal{F}_{n-1}) \\ &\stackrel{(1.4)}{\leq} 2 \cdot E \sum_i 1_{(-\infty, a]}(z_{n-1,i}) \cdot (E(Z_1(\infty))^r + m^r) \\ &= 2 \cdot (E(Z_1(\infty))^r + m^r) \cdot G_{n-1}(a), \text{ also (1.2).} \end{aligned}$$

Sei nun $l \in \{k+1, \dots, n\}$ und $c = 2 \cdot (E(Z_1(\infty))^r + m^r)$.

$$\begin{aligned} &E | (G_{n-1} * Z_1)(a) - (G_{n-1+l} * Z_{1-l})(a) |^r \\ &\stackrel{\text{Jensen-UGL}}{\leq} (G_{n-1}(a))^{r-1} E \int_0^a |Z_1(a-y) - G * Z_{1-l}(a-y)|^r dG_{n-1}(y) \\ &\stackrel{(1.2)}{\leq} c \cdot (G_{n-1}(a))^{r-1} \cdot G_{n-1}(a) \leq \frac{c}{G(0)} \cdot \frac{(G_n(a))^r}{G(0)^{(r-1)}}, \end{aligned}$$

da $G_n(a) \geq G_1(0) \cdot G_{n-1}(a)$ ist. Setzt man nun $X_1 =$

$$(G_{n-1} * Z_1)(a) - (G_{n-1+l} * Z_{1-l})(a) = E(Z_n(a) | \mathcal{F}_1) - E(Z_n(a) | \mathcal{F}_{1-l}),$$

so folgt mit (1.1)

$$E \left| \frac{Z_n(a)}{G_n(a)} - \frac{(G_{n-k} * Z_k)(a)}{G_n(a)} \right|^r \leq \frac{2}{(G_n(a))^r} \cdot \sum_{l=k+1}^n E |X_l|^r \leq$$

$$\frac{2c}{G(o)} \cdot \sum_{l=k+1}^n G(o)^{(1-r)l} \leq \frac{2c}{G(o)^r - G(o)} \cdot \frac{1}{G(o)^{(r-1)k}},$$

also die Behauptung. $\square$

Bemerkung: In dieser Arbeit wird stets vorausgesetzt, daß es ein $r \in (1, 2]$ gibt mit $E(Z_1(\infty))^r < \infty$. Falls dies auch für $s > 2$ erfüllt ist, kann natürlich $r = 2$ gewählt werden. Wenn man ein zu Satz 2.5 analoges Resultat für $s > 2$ beweisen will, kann man eine (1.1) ähnliche Ungleichung von Bahr [4] für unabhängige, zentrierte Zufallsvariablen verwenden. Da im Beweis zu (1.3) jedoch Martingaldifferenzen auftreten, kann an dieser Stelle nur die schwächere Hölder - Ungleichung angewendet werden. Dies führt später zu zusätzlichen Voraussetzungen. Deshalb beschränken wir uns auf $r \in (1, 2]$.

Korollar 1.3:

$$(1.5) \quad E(Z_n(\infty))^r \leq m^{rn} \cdot \left(2^{r-1} + \frac{2^{r+1} (E(Z_1(\infty))^r + m^r)}{m^r - m} \right)$$

Beweis: Setzt man $G = m \cdot 1_{[0, \infty)}$ und $k = 0$, so folgt aus (1.3)

$$E \left| \frac{Z_n(\infty)}{m^n} - 1 \right|^r \leq \frac{4 (E(Z_1(\infty))^r + m^r)}{m^r - m},$$

woraus mit der Jensen - Ungleichung die Behauptung folgt. $\square$

2. Konvergenz im r-ten Mittel gegen W^0

In diesem Abschnitt wird das Resultat von Asmussen / Kaplan [1], Satz 4 verallgemeinert.

Da $E(Z_1(o))^r \leq E(Z_1(\infty))^r < \infty$ und $\{Z_n(o)\}$ ein superkritischer Galton - Watson Prozeß ist, folgt, wenn man (1.5) auf $Z_n(o)$ anwendet: $\sup_n E|Z_n(o) / G(o)^n|^r < \infty$. Mit Satz 32.3 B von Loève [16] folgt

Lemma 2.1: Es gibt eine Zufallsvariable W^0 mit

$$(2.1) \quad Z_n(o) / G(o)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s., im } r\text{-ten Mittel}} W^0.$$

Lemma 2.2: Sei H eine auf $[0, \infty)$ konzentrierte Verteilungsfunktion mit $H(o) > 0$. Sei $x \geq 0$, $\delta > 0$ und $x/\delta < n+1$. Dann gilt

$$(2.2) \quad \sup_{y \in [0, x]} \frac{H^{*(n+1)}(y)}{H^{*n}(y)} \leq H(\delta) \cdot \frac{n+1}{n+1 - x/\delta}.$$

Der Beweis hierzu ist dem Beweis von Asmussen / Kaplan [1], Lemma 1 zu entnehmen. Hieraus folgt eine Verschärfung dieses Lemmas:

Korollar 2.3: Sei $a_n \geq 0$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}a_n = 0$. Dann gilt

$$(2.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H^{*(n+1)}(a_n)}{H^{*n}(a_n)} = H(o).$$

Beweis: Sei $\delta > 0$ beliebig gewählt. Für $n^{-1}a_n \leq \delta$ gilt mit (2.2)

$$H(o) \leq \frac{H^{*(n+1)}(a_n)}{H^{*n}(a_n)} \leq H(\delta) \frac{n+1}{n+1 - a_n/\delta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} H(\delta).$$

Läßt man dann δ gegen 0 konvergieren, so folgt (2.3). $\square$

Es wird noch die folgende Aussage gebraucht, die Asmussen / Kaplan [1] in Lemma 2 bewiesen haben. Der hier angegebene Beweis ist etwas kürzer.

Lemma 2.4: Sei H wie in Lemma 2.2 und $x \in (0, a]$ mit $H(x) > H(0)$. Dann gilt

$$(2.4) \quad \frac{H^{*n}(a-x)}{H^{*n}(a)} \leq \frac{1}{H(x) - H(0)} \cdot \left(\frac{H^{*(n+1)}(a)}{H^{*n}(a)} - H(0) \right).$$

Beweis:
$$H^{*n}(a-x) \cdot (H(x) - H(0)) = \int_{0+}^x H^{*n}(a-x) dH(y) \\ \leq \int_{0+}^a H^{*n}(a-y) dH(y) = H^{*(n+1)}(a) - H^{*n}(a) H(0). \quad \square$$

Satz 2.5: Sei $a_n \geq 0$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} a_n = 0$. Dann gilt

$$(2.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E \left| \frac{Z_n(a_n)}{G_n(a_n)} - W^0 \right|^r = 0.$$

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$. Für $n > k$ ist mit der Jensen - Ungleichung

$$E \left| \frac{Z_n(a_n)}{G_n(a_n)} - W^0 \right|^r \leq 4^{r-1} \cdot (A_1(n, k) + A_2(n, k) + A_3(n, k) + A_4(n, k))$$

$$\text{mit } A_1(n, k) = E \left| \frac{Z_n(a_n)}{G_n(a_n)} - \frac{(G_{n-k} * Z_k)(a_n)}{G_n(a_n)} \right|^r,$$

$$A_2(n, k) = E \left(\frac{(G_{n-k} * Z_k)(a_n)}{G_n(a_n)} - Z_k(0) \frac{G_{n-k}(a_n)}{G_n(a_n)} \right)^r,$$

$$A_3(n, k) = E \left| Z_k(0) \cdot \left(\frac{G_{n-k}(a_n)}{G_n(a_n)} - \frac{1}{G(0)^k} \right) \right|^r \text{ und}$$

$$A_4(n, k) = E \left| \frac{Z_k(0)}{G(0)^k} - W^0 \right|^r.$$

Wegen $G(0) > 1$ ist mit (1.3), (2.3) und (2.1)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_1(n, k) + A_3(n, k) + A_4(n, k)) \leq \delta_k \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0. \text{ Es}$$

bleibt also noch $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_2(n, k) \leq \delta_k$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$ zu zeigen.

Mit der Hölder - Ungleichung folgt

$$A_2(n, k) \leq \left(\frac{G_{n-k}(a_n)}{G_n(a_n)} \right)^{r-1} \cdot \int_0^{a_n} E(Z_k(a_n-y) - Z_k(0))^r d \frac{G_{n-k}(y)}{G_n(a_n)}.$$

Sei $x_0 = \sup \{x; G(x) = G(0)\}$. Falls $G(x_0) = G(0)$ ist, gilt
 $\lim_{y \rightarrow x_0} E(Z_k(y) - Z_k(0))^r = 0$, da $(Z_k(y) - Z_k(0))^r$ monoton wach-

send in y und rechtsstetig ist. Also gibt es in diesem Fall ein

$$y_0 > x_0 \text{ mit } \sup_{y \in [0, y_0)} E(Z_k(y) - Z_k(0))^r \leq \frac{G(0)^{kr}}{k}.$$

Falls $G(x_0) > G(0)$ ist, gilt für $y_0 = x_0$:

$$\sup_{y \in [0, y_0)} E(Z_k(y) - Z_k(0))^r = 0. \text{ Es folgt für } a_n \geq y_0:$$

$$\begin{aligned} A_2(n, k) &\leq G(0)^{-k(r-1)} \cdot \left(\int_0^{a_n - y_0} E(Z_k(a_n - y) - Z_k(0))^r dy \frac{G_{n-k}(y)}{G_n(a_n)} \right. \\ &\quad \left. + \int_{(a_n - y_0)^+}^{a_n} E(Z_k(a_n - y) - Z_k(0))^r dy \frac{G_{n-k}(y)}{G_n(a_n)} \right) \\ &\leq G(0)^{-kr} \cdot E(Z_k(\infty))^r \frac{G_n(a_n - y_0)}{G_n(a_n)} + \frac{1}{k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(2.4), (2.3)} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Falls $a_n \in [0, y_0)$ ist, verschwindet das erste der beiden Integrale. Man erhält also stets $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_2(n, k) \leq \frac{1}{k}$. $\square$

3. Fast sichere Konvergenz gegen W^0

In diesem Abschnitt wird die fast sichere Konvergenz von $Z_n(a_n) / G_n(a_n)$ gegen W^0 in annähernd der gleichen Allgemeinheit nachgewiesen, wie das in Abschnitt 2 für die Konvergenz im r -ten Mittel geschehen ist. Die benötigten Verschärfungen der Voraussetzungen bestehen darin, daß G in 0 nicht zu steil wachsen und $n^{-1}a_n$ nicht zu langsam fallen darf.

Zunächst werden einige Schreibweisen vereinbart, die im gesamten Abschnitt 3 gelten:

- seien $a, s, \epsilon \in (0, \infty)$ und $t \in [0, 1]$ beliebig
- sei $x_0 = \sup\{x; G(x) = G(0)\} < \infty$.

Bemerkung: Wenn $x_0 = \infty$ wäre, so folgt $Z_n(a_n) = Z_n(\infty)$ fast sicher für alle $a_n \geq 0$; dieser Fall ist trivial. Die später benötigte Bedingung "es gebe s, ϵ mit $G(x) - G(0) \leq x^s$ für $x \in [0, \epsilon]$ " ist insbesondere erfüllt, wenn $x_0 > 0$ ist.

Nun wird eine weitere Verallgemeinerung von Asmussen / Kaplan [1], Lemma 1 bewiesen.

Lemma 3.1: Es gebe s, ϵ mit $G(x) - G(0) \leq x^s$ für $x \in [0, \epsilon]$. Dann gibt es eine von $a, t, s, \epsilon, G(0)$ abhängige, aber von n unabhängige Konstante c mit

$$(3.1) \quad \sup_{y \in [0, a \cdot n^t]} \left(\frac{G_{n+1}(y)}{G_n(y)} - G(0) \right) \leq \begin{cases} c \cdot n^{-\frac{(1-t)s}{1+s}} & \text{falls } x_0 = 0 \\ c \cdot n^{-(1-t)} & \text{falls } x_0 > 0. \end{cases}$$

Beweis: Zuerst wird der Fall $x_0 > 0$ behandelt.

Sei $\epsilon \in (0, x_0)$ und $n \geq (a / \epsilon)^{1/(1-t)}$. Da dann

$a \cdot n^t / \epsilon < n + 1$ ist, folgt aus (2.2) für $y \in [0, a \cdot n^t]$:

$$\frac{G_{n+1}(y)}{G_n(y)} \leq G(\epsilon) \cdot \frac{n+1}{n+1 - \frac{a \cdot n^t}{\epsilon}} \leq$$

$$\begin{aligned} \leq G(o) \cdot \frac{n+1}{n+1 - \frac{a}{\epsilon}(n+1)^t} &\leq G(o) + G(o) \cdot \frac{a}{\epsilon} \cdot \frac{(n+1)^{t-1}}{1 - \frac{a}{\epsilon}(n+1)^{t-1}} \\ &\leq G(o) + \frac{G(o) \cdot \frac{a}{\epsilon} \cdot n^{t-1}}{1 - \frac{a}{\epsilon} \left(\left(\frac{a}{\epsilon} \right)^{1/(1-t)} + 1 \right)^{t-1}} \end{aligned}$$

Sei nun $x_0 = o$. Wählt man $\delta_n = a \cdot (n+1)^{(t-1)/(1+s)}$, so folgt für $n \in \mathbb{N}$ mit $n+1 \geq (a/\epsilon)^{(1+s)/(1-t)}$:

$$\epsilon \geq \delta_n \quad \text{und} \quad a \cdot n^t / \delta_n < (n+1)^{(1+ts)/(1+s)} \leq n+1.$$

Mit (2.2) folgt daraus für $y \in [o, an^t]$:

$$\frac{G_{n+1}(y)}{G_n(y)} \leq G(\delta_n) \cdot \frac{n+1}{n+1 - (n+1)^{(1+ts)/(1+s)}} \leq$$

(wegen $G(\delta_n) - G(o) \leq \delta_n^s$)

$$\begin{aligned} G(o) + (G(o) + a^s) \cdot \frac{(n+1)^{s(t-1)/(s+1)}}{1 - (n+1)^{s(t-1)/(s+1)}} &\leq \\ G(o) + \frac{G(o) + a^s}{1 - 2^{s(t-1)/(s+1)}} \cdot n^{-s(1-t)/(1+s)} &\quad \square \end{aligned}$$

Korollar 3.2: Es gebe s, ϵ mit $G(x) - G(o) \leq x^s$ für $x \in [o, \epsilon]$. Sei $\gamma = \frac{(1-t)s}{1+s}$ im Fall $x_0 = o$ beziehungsweise $\gamma = 1-t$ im Fall $x_0 > o$. Sei $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\gamma} k_n = o$. Dann gilt

$$(3.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in [o, an^t]} \frac{G_{n+k_n}(y)}{G_n(y) \cdot G_{k_n}(o)} = 1.$$

Bemerkung:

$$\inf_{y \in [o, an^t]} \frac{G_{n+k_n}(y)}{G_n(y) \cdot G_{k_n}(o)} = 1.$$

Beweis des Korollars: Sei $y \in [0, an^t]$. Aus (3.1) bekommt man

$$1 \leq \frac{G_{n+k_n}(y)}{G_n(y) \cdot G_{k_n}(0)} \leq \prod_{j=0}^{k_n-1} \left(1 + \frac{c}{G(0)}(n+j)^{-\gamma}\right)$$

und wegen $\log \prod_{j=0}^{k_n-1} \left(1 + \frac{c}{G(0)}(n+j)^{-\gamma}\right) \leq \sum_{j=0}^{k_n-1} \frac{c}{G(0)} n^{-\gamma}$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ folgt die Behauptung. $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Ordnung der Abschätzung in (3.1) im allgemeinen nicht verbessert werden kann.

Beispiel: Sei H die Verteilungsfunktion einer Poisson - Verteilung mit Parameter $\lambda > 1$. Dann ist

$$\frac{H^{*(n+1)}(n^t)}{H^{*n}(n^t)} - H(0) \geq e^{-\lambda} \cdot (1 - \lambda^{-1} + o(1)) n^{t-1}.$$

Beweis: Sei $k < n$.

$$H^{*n}(k) = e^{-n\lambda} \cdot \frac{(\lambda n)^k}{k!} \cdot \sum_{j=0}^k (n\lambda)^{j-k} \cdot \frac{k!}{j!} \leq e^{-n\lambda} \cdot \frac{(\lambda n)^k}{k!} \cdot \frac{\lambda n}{\lambda n - k}.$$

Daraus folgt

$$\frac{H^{*(n+1)}(k)}{H^{*n}(k)} \geq \frac{e^{-\lambda(n+1)} \cdot \frac{(\lambda(n+1))^k}{k!}}{e^{-\lambda n} \cdot \frac{(\lambda n)^k}{k!} \cdot \frac{\lambda n}{\lambda n - k}} \geq e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{k}{\lambda n}\right) \cdot \frac{k}{n}.$$

Sei $[x] = \max \{z \in \mathbb{Z} ; z \leq x\}$. Setzt man $k = [n^t]$, so folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 3.3: Sei H die Verteilungsfunktion eines positiven Maßes auf $\mathbb{R}$ und $L(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x} dH(x)$ existiere für ein $\lambda \geq 0$. Dann gilt

$$(3.3) \quad H^{*n}(a) \leq (L(\lambda))^n \cdot e^{\lambda a}.$$

Beweis:

$$(L(\lambda))^n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x} dH^{*n}(x) \geq \int_{-\infty}^a e^{-\lambda x} dH^{*n}(x) \geq e^{-\lambda a} \cdot H^{*n}(a). \quad \square$$

Lemma 3.4: Sei $a_n \in [0, \infty)$ beliebig und $\alpha > 1$. Sei

$$(3.4) \quad k_n = \left[(\log n) \cdot \left(\frac{\alpha}{(1 - \frac{1}{r}) \cdot \log G(o)} \right) \right] + 1.$$

Dann gilt

$$(3.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Z_n(a_n)}{G_n(a_n)} - \frac{(G_{n-k_n} * Z_{k_n})(a_n)}{G_n(a_n)} \right| = 0$$

fast sicher.

Beweis: Mit der Jensen - Ungleichung bekommt man aus (1.3)

$$E \left| \frac{Z_n(a_n)}{G_n(a_n)} - \frac{(G_{n-k_n} * Z_{k_n})(a_n)}{G_n(a_n)} \right| \leq \frac{c^{1/r}}{G(o)^{(r-1)k_n/r}} \leq c^{1/r} n^{-\alpha}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} < \infty$ ist, folgt die Behauptung. $\square$

Sei

$$(3.6) \quad R(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x} dG(x).$$

Satz 3.5: Sei $a_n \in [0, a_n^t]$ und es gebe s, ϵ mit

$G(x) - G(o) \leq x^s$ für $x \in [0, \epsilon]$. Dann gilt

$$(3.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n(a_n)}{G_n(a_n)} = W^0 \quad \text{fast sicher.}$$

Beweis: Sei k_n aus (3.4). Wir weisen nach, daß

$$\begin{aligned} \left| \frac{Z_n(a_n)}{G_n(a_n)} - \frac{Z_{k_n}(o)}{G(o)^{k_n}} \right| &\leq \left| \frac{Z_n(a_n)}{G_n(a_n)} - \frac{(G_{n-k_n} * Z_{k_n})(a_n)}{G_n(a_n)} \right| + \\ &\quad \left(\frac{(G_{n-k_n} * Z_{k_n})(a_n)}{G_n(a_n)} - \frac{G_{n-k_n}(a_n)}{G_n(a_n)} \cdot Z_{k_n}(o) \right) + \\ &\quad \left| \frac{G_{n-k_n}(a_n) G(o)^{k_n}}{G_n(a_n)} - 1 \right| \cdot \frac{Z_{k_n}(o)}{G(o)^{k_n}} \end{aligned}$$

fast sicher gegen 0 konvergiert.

Nach (3.5) konvergiert der erste Term fast sicher gegen 0. Beim letzten Term konvergiert $Z_{k_n}(0) / G(0)^{k_n}$ fast sicher gegen w^0 . Da $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - k_n)^t / n^t = 1$ ist, gibt es eine Konstante $\tilde{a}$ mit $a_n \in [0, \tilde{a}(n - k_n)^t]$. Aus (3.2) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{n-k_n}(a_n) \cdot G(0)^{k_n} / G_n(a_n) = 1,$$

also ist auch der letzte Term fast sicher gegen 0 konvergent. Wegen $G_{n-k}(y) / G_n(y) \leq G(0)^{-k}$ genügt es also,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{a_n} \frac{G_n(a_n - y)}{G_n(a_n)} d \frac{Z_{k_n}(y) - Z_{k_n}(0)}{G(0)^{k_n}} = 0$$

fast sicher nachzuweisen. Dies erfordert zwei Schritte.

(i) Aus (3.1) folgt, daß es ein $\gamma > 0$ gibt mit

$$\sup_{y \in [0, a_n]} \frac{G_{n+1}(y)}{G_n(y)} - G(0) \leq c \cdot n^{-\gamma}.$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, daß

$$N\gamma + \frac{\alpha}{(1 - \frac{1}{r}) \cdot \log G(0)} \cdot \log \left(\frac{G(0)}{m} \right) > 1$$

ist, wobei α aus (3.4) stammt. Sei $x > x_0$, also $G(x) > G(0)$ und $b = Nx$. Nun wird

$$B_n = \int_b^{a_n} \frac{G_n(a_n - y)}{G_n(a_n)} d \frac{Z_{k_n}(y) - Z_{k_n}(0)}{G(0)^{k_n}}$$

untersucht. Falls $a_n < b$ ist, ist $B_n = 0$. Im Fall $a_n \geq b$ ist

$$EB_n \leq \frac{G_n(a_n - b)}{G_n(a_n)} \cdot \left(\frac{m}{G(0)} \right)^{k_n} = \left(\prod_{j=1}^N \frac{G_n(a_n - jx)}{G_n(a_n - (j-1)x)} \right) \cdot \left(\frac{m}{G(0)} \right)^{k_n}$$

$$\leq \left(\frac{1}{G(x) - G(0)} \right)^N \cdot \left(\sup_{y \in [0, a_n]} \left(\frac{G_{n+1}(y)}{G_n(y)} - G(0) \right) \right)^N \cdot \left(\frac{m}{G(0)} \right)^{k_n} \quad (2.4)$$

$$\leq \left(\frac{c}{G(x) - G(o)} \right)^N \cdot n^{-N\gamma} \cdot \left(\frac{m}{G(o)} \right)^{k_n}$$

$$\leq \text{const} \cdot n^{-(N\gamma + \frac{\alpha}{(1 - \frac{1}{r}) \cdot \log G(o)} \cdot \log(\frac{G(o)}{m}))}$$

(3.4)

summierbar über n , also folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$ fast sicher.

Es bleibt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{G_n(a_n - y)}{G_n(a_n)} d \frac{Z_{k_n}(y) - Z_{k_n}(o)}{G(o)^{k_n}} = 0$ fast

sicher nachzuweisen.

(ii) Sei $y_{k_n} = \inf \{y; G(y) \geq G(o) + k_n^{-3}\}$; wegen der Rechtstetigkeit von G gilt $G(y_{k_n}) - G(o) \geq k_n^{-3}$ und

$G(y_{k_n}^-) - G(o) \leq k_n^{-3}$. Sei n so groß, daß $y_{k_n} \leq b$ ist.

$$\int_0^{y_{k_n}^-} \frac{G_n(a_n - y)}{G_n(a_n)} d \frac{Z_{k_n}(y) - Z_{k_n}(o)}{G(o)^{k_n}} +$$

$$\int_{y_{k_n}}^b \frac{G_n(a_n - y)}{G_n(a_n)} d \frac{Z_{k_n}(y) - Z_{k_n}(o)}{G(o)^{k_n}}$$

$$\leq \frac{Z_{k_n}(y_{k_n}^-) - Z_{k_n}(o)}{G(o)^{k_n}} + \frac{G_n(a_n - y_{k_n})}{G_n(a_n)} \cdot \frac{Z_{k_n}(b)}{G(o)^{k_n}}$$

$$\stackrel{(2.4), (3.1)}{\leq} \frac{Z_{k_n}(y_{k_n}^-) - Z_{k_n}(o)}{G(o)^{k_n}} + \frac{c \cdot n^{-\gamma}}{G(y_{k_n}) - G(o)} \cdot \frac{Z_{k_n}(b)}{G(o)^{k_n}}$$

$$\stackrel{(3.4)}{\leq} \frac{Z_{k_n}(y_{k_n}^-) - Z_{k_n}(o)}{G(o)^{k_n}} + \text{const} \cdot k_n^3 \cdot C^{-k_n} \cdot \frac{Z_{k_n}(b)}{G(o)^{k_n}} = A_{k_n}$$

fast sicher mit $C = \exp \left(\frac{\gamma \cdot \log G(o)}{\alpha} \cdot (1 - \frac{1}{r}) \right) > 1$.

Zu beachten ist, daß die nun gefundene Schranke A_{k_n} nur noch von k_n abhängt. Mit (3.6), (3.3) folgt

$$EA_k \leq \left(\frac{G(y_{k^-})}{G(o)} \right)^k - 1 + \text{const} \cdot k^3 \cdot C^{-k} \cdot \frac{R(z)^k e^{zb}}{G(o)^k} = \\ 0(k^{-2}) + \text{const} \cdot e^{zb} \cdot k^3 \cdot \left(\frac{R(z)}{C \cdot G(o)} \right)^k.$$

Da $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = G(o)$ ist, kann z so groß gewählt werden, daß

$\frac{R(z)}{C \cdot G(o)} < 1$ ist. Daraus folgt $\sum_{k=0}^{\infty} EA_k < \infty$, also gilt

$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{k_n} = 0$ fast sicher. $\square$

Bemerkung: Da $\{Z_n(o)\}$ ein superkritischer Galton - Watson Prozeß mit endlicher Erwartung ist, gilt

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(o) = 0\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n(o)}{EZ_n(o)} = 0\right).$$

Wenn $\{a_n\}$ eine Folge ist, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n(a_n)}{EZ_n(a_n)}$ fast sicher

existiert, so braucht jedoch $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(a_n) = 0\right)$ nicht gleich

$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n(a_n)}{EZ_n(a_n)} = 0\right)$ zu sein. Gilt beispielsweise

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n(a_n)}{EZ_n(a_n)} = W^0$ fast sicher mit $a_n \rightarrow \infty$, so folgt aus dem

nächsten Lemma $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n(a_n)}{EZ_n(a_n)} = 0\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(o) = 0\right)$

$$< P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\infty) = 0\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(a_n) = 0\right).$$

Lemma 3.6: Sei $a_n \geq 0$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Dann ist

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(a_n) = 0\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\infty) = 0\right).$$

Beweis: Der Beweis verläuft ähnlich wie ein Teil des Beweises von Biggins [7], 3.

Sei $\bar{Z}_n(z_{k,i})$ die Anzahl der Nachfahren in Generation n des Individuums mit Position $z_{k,i}$ in der Generation k , die die Position $z_{k,i}$ nicht verlassen haben. $\bar{Z}_n(z_{k,i})$ ist dann ein superkritischer Galton - Watson Prozeß mit

$$E(\bar{Z}_{k+1}(z_{k,i}) | \mathcal{F}_k) = G(o).$$

Daraus folgt $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Z}_n(z_{k,i}) = 0 | \mathcal{F}_k) = \bar{q} < 1$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

ist, gilt $\{\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(a_n) = 0\} \subseteq \{\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Z}_n(z_{k,i}) = 0 \text{ für alle } z_{k,i}\}$,

woraus $P(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(a_n) = 0) \leq$

$$E P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Z}_n(z_{k,i}) = 0 \text{ für alle } z_{k,i} | \mathcal{F}_k) = E \bar{q}^{\bar{Z}_k(\infty)}$$

folgt. Sei $q = P(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\infty) = 0)$. Nach Athreya / Ney [3],

Seite 5 gilt dann: $q \leq P(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(a_n) = 0) \leq E \bar{q}^{\bar{Z}_k(\infty)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} q$. □

Nun wird noch das Konvergenzverhalten der totalen Nachkommenschaft in einem Streifen untersucht. Für den superkritischen Galton - Watson Prozeß $\{Z_n(o)\}$ gilt nach Jagers [13], Theorem 2.12.1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(o)^{-n} \cdot \sum_{k=0}^n Z_k(o) = W^0 \cdot \frac{G(o)}{G(o) - 1}$$

fast sicher. Für Streifen der Breite $a > 0$ gilt ein analoges Resultat.

Satz 3.7: Es existiere s, ϵ mit $G(x) - G(o) \leq x^s$ für $x \in [0, \epsilon]$. Dann gilt für alle $a > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (G_n(a))^{-1} \cdot \sum_{k=0}^n Z_k(a) = W^0 \cdot \frac{G(o)}{G(o) - 1}$$

fast sicher.

Beweis: Da $G(o) > 1$ ist, gibt es ein $\alpha \in (0, 1)$ mit $m^{-\alpha} \cdot G(o) > 1$. Dann ist

$$E \sum_{k=0}^{\alpha n - 1} \frac{Z_k(a)}{G_n(a)} \leq \sum_{k=0}^{\alpha n - 1} \frac{m^k}{G(o)^n} \leq \frac{m^{\alpha n}}{(m-1) \cdot G(o)^n}$$

summierbar über n und es gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{Z_k(a)}{G_n(a)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=\alpha n-1}^n \frac{G_k(a)}{G_n(a)} \cdot \frac{Z_k(a)}{G_k(a)} \leq$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=\alpha n-1}^n \frac{1}{G(o)^{n-k}} \cdot \sup_{j \geq \alpha n-1} \left\{ \frac{Z_j(a)}{G_j(a)} \right\} \leq w^0 \cdot \frac{G(o)}{G(o) - 1} \quad (3.7)$$

fast sicher.

Weiterhin gilt für $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{Z_k(a)}{G_n(a)} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n-i}^n \frac{Z_k(a)}{G_n(a)} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^i \frac{G_{n-k}(a)}{G_n(a)} \cdot \frac{Z_{n-k}(a)}{G_{n-k}(a)} \\ &\stackrel{(3.7), (2.3)}{=} \sum_{k=0}^i G(o)^{-k} \cdot w^0 = w^0 \cdot \frac{G(o) - G(o)^{-i}}{G(o) - 1} \end{aligned}$$

fast sicher. Da $i \in \mathbb{N}$ beliebig groß gewählt werden kann, folgt die Behauptung. $\square$

4. Faltungsinverse und die Prozesse $\{U_n(a)\}$

In den Abschnitten 2 und 3 wurden Konvergenzaussagen für $Z_n(a_n)$ für den Fall gemacht, daß $Z_n(a_n)$ mit $EZ_n(a_n)$ normiert wird. Das entspricht zwar der Vorgehensweise bei superkritischen Galton - Watson Prozessen, jedoch erhält man nur in den Fällen $a_n = 0$ und $a_n = \infty$ Martingale. In diesem Abschnitt wird eine neue Normierung vorgenommen, die die Martingaleigenschaft erhält.

Sei $\mathcal{M} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \cdot 1_{(-\infty, 0)} \equiv 0, f \text{ ist von beschränkter Variation auf jedem endlichen Intervall, } f \text{ ist rechtsstetig}\}$.

Zunächst wird gezeigt, daß es für die hier betrachteten Funktionen $G(\cdot) = EZ_1(\cdot)$ stets ein $F \in \mathcal{M}$ gibt, das $F * G = 1_{[0, \infty)}$ erfüllt. Sei

$$J(x) = \frac{G(x)}{G(0)} - 1_{[0, \infty)}(x).$$

Da $G \in \mathcal{M}$ ist, ist auch $J \in \mathcal{M}$. Sei

$$F(x) = \frac{1}{G(0)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_k(x),$$

wobei $J_k = J^{*k}$ und $J_0 = 1_{[0, \infty)}$ sei. Weiterhin sei für $f \in \mathcal{M}$ $V_f(x)$ die totale Variation von f in $(-\infty, x]$.

Satz 4.1: Sei G auf $[0, \infty)$ konzentriert und $G(0) > 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$(4.1) \quad F_n(x) = G(0)^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} J_k(x)$$

absolut konvergent. Ist $s \in [0, \infty)$ so groß, daß $R(s) < 2G(0)$ ist, so gilt

$$(4.2) \quad V_{F_n}(x) \leq e^{sx} \cdot (2G(0) - R(s))^{-n}.$$

Insbesondere ist $F_n \in \mathcal{M}$.

(ii) $F_n = F^{*n}$ und F_n ist die einzige Funktion in $\mathcal{M}$ mit $F_n * G_n = 1_{[0, \infty)}$.

Beweis: Zu (i): Sei $L(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dJ(x)$. Da

$G(x) = G(0) \cdot (1_{[0,\infty)}(x) + J(x))$ ist, folgt wegen (3.6)

$L(s) = R(s)/G(0) - 1 < 1$, falls $R(s) < 2G(0)$ gilt.

Wegen $\lim_{s \rightarrow \infty} R(s) = G(0)$ ist diese Ungleichung für alle genügend großen s erfüllt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |F_n(x)| &\leq v_{F_n}(x) \leq G(0)^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} J_k(x) \\ &\stackrel{(3.3)}{\leq} G(0)^{-n} e^{sx} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{R(s)}{G(0)} - 1 \right)^k \\ &= e^{sx} \cdot (2G(0) - R(s))^{-n}. \end{aligned}$$

Zu (ii): Sei $f_{n,1}(x) = G(0)^{-n} \cdot \sum_{k \in \{0,2,4,\dots\}} \binom{n+k-1}{k} J_k(x)$

und $f_{n,2}(x) = f_{n,1}(x) - F_n(x)$.

Wie im Beweis von (i) gesehen gibt es ein s_0 mit $L(s) < 1$ für alle $s \geq s_0$. Damit folgt aus dem verallgemeinerten Konvergenzsatz für Laplacetransformierte (siehe Feller [9], Seite 433, Theorem 2a, 2. Teil), daß

$$\int_0^{\infty} e^{-st} df_{n,1}(t) = G(0)^{-n} \cdot \sum_{k \in \{0,2,4,\dots\}} \binom{n+k-1}{k} L(s)^k$$

konvergent ist für $s \geq s_0$. Entsprechendes gilt für $f_{n,2}$.

Also gilt für $s \geq s_0$:

$$\begin{aligned} (4.3) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} dF_n(t) &= G(0)^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} L(s)^k \\ &= \left(\int_0^{\infty} e^{-st} dF(t) \right)^n = R(s)^{-n} \\ &= 1 / \left(\int_0^{\infty} e^{-st} dG_n(t) \right). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Widder [19], Ch. II, Theorem 11.5 und 6.3. $\square$

Der Einfachheit halber sei G in den folgenden Beispielen 4.2 und 4.3 auf 1 normiert.

Beispiel 4.2: Für einige diskrete Verteilungen haben die Faltungsinversen F eine besonders einfache Gestalt. In den Fällen (i), (ii) und (iii) gebe ich die Häufigkeitsfunktionen an.

(i) Bernoulliverteilung:

Sei G gegeben durch $G\{0\} = p$, $G\{1\} = 1 - p = q$.

Dann ist $G_n\{k\} = \binom{n}{k} p^{n-k} q^k$ und

$$F_n\{k\} = \frac{1}{p^n} \left(-\frac{q}{p}\right)^k \binom{n+k-1}{k}, \quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) Geometrische Verteilung:

Sei G gegeben durch $G\{k\} = p q^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$G_n\{k\} = p^n q^k \binom{n+k-1}{k} \quad \text{und}$$

$$F_n\{k\} = \binom{n}{k} \frac{1}{p^{n-k}} \left(-\frac{q}{p}\right)^k, \quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Bernoulliverteilung und die Geometrische Verteilung sind also in einem gewissen Sinn dual.

(iii) Poisson - Verteilung:

Sei G gegeben durch $G\{k\} = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$G_n\{k\} = \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} \quad \text{und}$$

$$F_n\{k\} = \frac{(-n\lambda)^k}{k!} e^{n\lambda}, \quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0.$$

(iv) Exponentialverteilung mit Atom in $\{0\}$:

$$\text{Sei} \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ p + q(1 - e^{-ax}) & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Dann ist} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 + \frac{q}{p} e^{-\frac{a}{p}x} & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Bemerkungen zu Satz 4.1: Bei der Eindeutigkeitsaussage in Teil (ii) geht insbesondere ein, daß $F \cdot 1_{(-\infty, 0)} \equiv 0$ ist. Das folgende Beispiel zeigt, daß es zu einer Verteilungsfunktion G mehrere Funktionen F mit $F * G = 1_{[0, \infty)}$ geben kann, die rechtsstetig und von lokal endlicher Variation sind.

Beispiel 4.3: Sei G wie in Beispiel 4.2 (i) mit $p = q = 1/2$.

$$\text{Sei} \quad \bar{F}(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \in [2n-1, 2n), \quad n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } x \in [2n, 2n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ -2 & \text{für } x \in [2n, 2n+1), \quad -n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

$$\text{Dann ist } (G * \bar{F})(x) = \frac{1}{2} (\bar{F}(x) + \bar{F}(x-1)) = 1_{[0, \infty)}(x).$$

Ein anderer Existenzsatz für Faltungsinverse ist bei Gelfand, Raikow und Schilow [10], Seite 252 zu finden.

Nun werden neue Prozesse definiert. Sei

$$U_n(a) = (F_n * Z_n)(a) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

$$\text{Bemerkenswert ist } U_n(0) = Z_n(0) / G(0)^n.$$

Satz 4.4: Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{U_n(a)\}$ ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}$.

$$\begin{aligned} \text{Beweis:} \quad E(U_n(a) \mid \mathcal{F}_{n-1}) &= \sum_i E((F_n * Z_n)(a) \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \sum_i \int F_n(a-y) dG(y - z_{n-1,i}) \\ &\quad \text{Harris [12], Ch. III, 9.1} \\ &= \sum_i (F_n * G)(a - z_{n-1,i}) \\ &= (F_{n-1} * Z_{n-1})(a) = U_{n-1}(a). \quad \square \end{aligned}$$

Satz 4.5: $U_n(a)$ ist fast sicher und im r -ten Mittel konvergent gegen eine Zufallsvariable $U(a)$. Für $s \in [0, \infty)$ genügend groß ist

$$\rho = \frac{R(s)}{(2G(0) - R(s))^r} < 1. \quad \text{Es gilt mit}$$

$$c = 4 \cdot (E(Z_1(\infty))^r + m^r) :$$

$$(4.4) \quad E|U(a) - U_k(a)|^r \leq \frac{c \cdot e^{sar}}{1 - \rho} \cdot \rho^{k+1}.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
 E | U_n(a) - U_{n-1}(a) |^r &\leq E \left(\int_0^a |Z_n(a-y) - (G * Z_{n-1})(a-y)| dV_{F_n}(y) \right)^r \\
 &\stackrel{\text{Jensen-UGL, (1.2)}}{\leq} (V_{F_n}(a))^{r-1} \cdot \int_0^a \frac{c}{2} G_{n-1}(a-y) dV_{F_n}(y) \\
 &\stackrel{(4.1)}{\leq} (V_{F_n}(a))^{r-1} \cdot \frac{c}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} (G_{n-1} * J_k)(a) \\
 &\stackrel{(4.2), (3.3)}{\leq} \left(\frac{e^{sa}}{(2G(o) - R(s))^n} \right)^{r-1} \cdot \frac{c}{2} \frac{R(s)^{n-1} \cdot e^{sa}}{(2G(o) - R(s))^n} \\
 &\leq \frac{c}{2} e^{sar} \cdot \rho^n
 \end{aligned}$$

für s so groß, daß $R(s) < 2G(o)$ ist. $\rho < 1$ ist für alle s genügend groß erfüllt, da $R(s)$ monoton gegen $G(o) > 1$ fällt. Setzt man nun $X_j = U_j(a) - U_{j-1}(a)$, so folgt mit (1.1):

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad E | U_n(a) - U_k(a) |^r &\leq 2 \sum_{j=k+1}^n E |X_j|^r \\
 &\leq c \cdot e^{sar} \cdot \sum_{j=k+1}^n \rho^j \leq \frac{c \cdot e^{sar}}{1 - \rho} \cdot \rho^{k+1}.
 \end{aligned}$$

Insbesondere ist also $\sup_{n \in \mathbb{N}} E |U_n(a)|^r < \infty$, und wegen der Martingaleigenschaft folgt mit Loève [16], Seite 60, daß $U_n(a)$ fast sicher und im r -ten Mittel konvergiert. (4.4) folgt aus (4.5) mit Hilfe des Fatou'schen Lemmas. $\square$

Beispiel 4.6: Sei $G(x) = G(o)1_{[0, \infty)}(x) + (m - G(o))1_{[1, \infty)}(x)$ mit $1 < G(o) < m$. Aus (2.5) und (3.7) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{Z_n(1)}{nG(o)^n} - \frac{Z_n(o)}{G(o)^n} \cdot \frac{m - G(o)}{G(o)} \right) = 0$$

fast sicher und im r -ten Mittel. Aus Satz 4.5 folgt mit Beispiel 4.2 (i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{Z_n(1)}{G(o)^n} - n \cdot \frac{Z_n(o)}{G(o)^n} \cdot \frac{m - G(o)}{G(o)} \right) = U(1)$$

fast sicher und im r -ten Mittel. $\square$

Bemerkung: Wenn $m^{1/r} + m < 2G(o)$ ist, kann in (4.4) $s = o$ gewählt werden und die Abschätzung wird unabhängig von a .

Satz 4.7: $U(\cdot)$ ist auf $[o, \infty)$ im r -ten Mittel rechtsstetig.

Beweis: Sei $a \in [o, \infty)$, $b > a$ und $y \in (a, b]$. Wegen

$$\lim_{y \downarrow a} E |U(y) - U(a)|^r \leq \lim_{y \downarrow a} 3^{r-1} \cdot (E |U(y) - U_k(y)|^r +$$

$$E |U_k(y) - U_k(a)|^r + E |U_k(a) - U(a)|^r)$$

$$\stackrel{(4.4)}{\leq} \text{const} \cdot (\rho^k + \lim_{y \downarrow a} E |U_k(y) - U_k(a)|^r)$$

mit $\rho < 1$ genügt es, für alle Folgen $\{y_n\} \subset (a, b]$ mit

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ nachzuweisen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} E |U_k(y_n) - U_k(a)|^r = 0$

ist. Wegen der Rechtsstetigkeit von Z_k und F_k ist auch U_k

rechtsstetig, also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} |U_k(y_n) - U_k(a)| = 0$ fast

sicher. Da

$$|U_k(y_n) - U_k(a)|^r \leq$$

$$2^{r-1} \cdot \left(\int_0^{y_n} V_{F_k}(y_n - y) dZ_k(y) \right)^r + \left(\int_0^a V_{F_k}(a - y) dZ_k(y) \right)^r$$

$$\leq 2^r \cdot (V_{F_k}(b))^r \cdot (Z_k(\infty))^r$$

P -integrierbar ist, folgt die Behauptung mit dem Satz von Lebesgue. $\square$

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen $U_n(a)$ und den von Kingman [15] und Biggins [6] behandelten Zufallsvariablen

$$(4.6) \quad W_n(s) = R(s)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} dZ_n(t)$$

untersuchen. Für alle $s \in [0, \infty]$ ist $\{W_n(s)\}$ ein nicht negatives Martingal, also gilt

$$(4.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(s) = W(s) \quad \text{fast sicher.}$$

Bemerkenswert ist $W_n(0) = m^{-n} Z_n(\infty)$ und $W_n(\infty) = G(0)^{-n} Z_n(0)$, also insbesondere $W(\infty) = W^0$. Sei nun s so groß, daß

$R(s) < 2G(0)$ ist. Aus (4.3) folgt, daß $\int_0^\infty e^{-sx} dF_n(x) = R(s)^{-n}$

konvergent ist. Die empirische Laplacetransformierte des signierten Maßes $U_n(\cdot)$ ist dann

$$\int_0^\infty e^{-sx} dU_n(x) = R(s)^{-n} \int_0^\infty e^{-sx} dZ_n(x) = W_n(s).$$

Korollar 4.8: Sei $s \in [0, \infty)$ mit $R(s) < (2G(0) - R(s))^r$. Dann gilt für alle $t > s$:

$$W(t) = t \int_0^\infty U(x) \cdot e^{-tx} dx \quad \text{fast sicher.}$$

Beweis: Sei $t > s$. Aus (4.2) folgt

$$\left| e^{-tx} \cdot U_n(x) \right| \leq e^{-tx} \cdot Z_n(\infty) \cdot e^{sx} \cdot (2G(0) - R(s))^{-n}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Mit partieller Integration bekommt man dann

$$\int_0^\infty e^{-tx} dU_n(x) = t \int_0^\infty e^{-tx} U_n(x) dx \quad \text{und}$$

$$E \left| \int_0^\infty e^{-tx} (U_n(x) - U(x)) dx \right| \leq \underbrace{\int_0^\infty e^{-tx} e^{sx} dx}_{\substack{\text{Fubini,} \\ (4.4)}} \cdot \text{const} \cdot \bar{\rho}^{n+1}$$

ist summierbar, da $\bar{\rho} < 1$ ist. Daraus folgt

$$W(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} t \int_0^\infty e^{-tx} U_n(x) dx = t \int_0^\infty e^{-tx} U(x) dx$$

fast sicher. $\square$

5. Konvergenz gegen $W(s_a)$

Die in Abschnitt 1 gemachten generellen Voraussetzungen seien wie stets gegeben außer der, daß G auf $[0, \infty)$ konzentriert sein muß mit $G(0) > 1$. Stattdessen sei für diesen Abschnitt nur vorausgesetzt, daß es ein $s > 0$ gibt, so daß

$$(5.1) \quad R(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} dG(x) < \infty$$

und daß G nicht in einem Punkt konzentriert ist. Das bedeutet, daß sich die Individuen nicht notwendig nur in eine Richtung bewegen müssen. Sei

$$M = m^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot dG(x) .$$

M ist der erwartete Lagezuwachs eines zufälligen Nachkommen. Wegen (5.1) ist $M \in (-\infty, \infty]$.

Hier wird das Konvergenzverhalten von $Z_n(a_n) / G_n(a_n)$ für Folgen $\{a_n\}$ untersucht, die $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} a_n = a < M$ erfüllen. Der Fall $a = M$ wurde von Asmussen / Kaplan [1] und [2] behandelt. Sei

$$A = \inf \{x; G(x) > 0\} ,$$

$$B = \sup \{s \in [0, \infty); \int_{-\infty}^0 e^{-sx} dG(x) < \infty\} .$$

Wie schon gesagt, sei stets $B > 0$ vorausgesetzt. Aus $A > -\infty$ folgt $B = \infty$, aber für $A = -\infty$ kann $B < \infty$ sein. Klar ist, daß R auf $(0, B)$ unendlich oft differenzierbar ist.

Lemma 5.1: Sei $s \in (0, B)$. Dann gilt

$$(5.2) \quad 0 < \sigma^2(s) = \frac{R''(s)}{R(s)} - \left(\frac{R'(s)}{R(s)} \right)^2 = \frac{d}{ds} \left(\frac{R'(s)}{R(s)} \right) < \infty .$$

$$(5.3) \quad \text{Die Funktion } - \frac{R'(s)}{R(s)} \text{ ist streng monoton fallend in } s \in (0, B) .$$

$$(5.4) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \left(- \frac{R'(s)}{R(s)} \right) = M \in (-\infty, \infty] .$$

$$(5.5) \quad \lim_{s \rightarrow B} \left(- \frac{R'(s)}{R(s)} \right) = A_0 < M \text{ existiert, wobei}$$

$$A_0 = A \text{ ist, falls } B = \infty \text{ ist. Falls } B < \infty$$

$$\text{ist (dann ist } A = -\infty), \text{ kann } A_0 > A \text{ sein.}$$

Beweis: Siehe Petrov [18], Lemma Seite 287.

Ein Beispiel für $A_0 > A$ ist bei Petrov [18], Seite 288 zu finden.

Aus (5.3), (5.4) und (5.5) folgt, daß es eine Funktion

$$S : (A_0, M) \longrightarrow (0, B)$$

gibt mit

$$(5.6) \quad - \frac{R'(S(a))}{R(S(a))} = a \text{ für alle } a \in (A_0, M).$$

Wegen (5.2) ist S streng monoton fallend auf (A_0, M) . Abkürzend schreibe ich s_a für $S(a)$. Aus (5.4) und (5.5) folgt

$$(5.7) \quad \lim_{a \rightarrow M} s_a = 0 \quad \text{und}$$

$$(5.8) \quad \lim_{a \rightarrow A_0} s_a = B.$$

Wie bei Biggins [7] wird für $a \in \mathbb{R}$

$$(5.9) \quad \mu(a) = \inf \{ e^{as} \cdot R(s) ; s \in [0, \infty) \}$$

definiert. Klar ist $0 \leq \mu(a) \leq m$ und μ ist monoton wachsend in a . Durch Differenzieren sieht man

$$(5.10) \quad \mu(a) = R(s_a) \cdot e^{as_a} \quad \text{für } a \in (A_0, M).$$

In (A_0, M) ist μ streng monoton wachsend und $\lim_{a \rightarrow M} \mu(a) = m$.

Beispiel 5.2: (i) $m^{-1} \cdot G$ gehöre zur Poisson - Verteilung mit Parameter λ . Dann ist $A = 0$, $B = \infty$, also $A_0 = 0$ nach (5.5). Weiterhin hat man $R(s) = m \cdot \exp(-\lambda(1 - e^{-s}))$ und $M = \lambda$ sowie $-\frac{R'(s)}{R(s)} = \lambda e^{-s} = \sigma^2(s)$. Für $a \in (0, \lambda)$ ist

$$s_a = \log\left(\frac{\lambda}{a}\right) \quad \text{und} \quad \mu(a) = m \cdot e^{a-\lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{a}\right)^a.$$

(ii) $m^{-1} \cdot G$ gehöre zur Normalverteilung mit Mittelwert M und Varianz σ^2 . Dann ist $A = -\infty$, $B = \infty$ und

$$R(s) = m \cdot \exp\left(\frac{(\sigma s)^2}{2} - sM\right). \text{ Daraus folgt } -\frac{R'(s)}{R(s)} = M - \sigma^2 s,$$

und da $A_0 = A = -\infty$ ist, gilt für $a \in (-\infty, M)$:

$$s_a = (M - a)/\sigma^2 \text{ sowie } \sigma^2(s) = \sigma^2. \text{ Weiterhin erhält man}$$

$$\mu(a) = m \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{M - a}{\sigma}\right)^2\right). \quad \square$$

Sei K kompakt und $K \subset (A_0, M)$. Wir müssen im folgenden stets zwei Fälle unterscheiden:

(I) G ist nicht auf einem Gitter konzentriert.

(II) G ist auf einem Gitter konzentriert, das heißt G besitzt nur Wachstumspunkte x der Form $x = e + nd$, wobei $e \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ und $d \in (0, \infty)$ maximal sei. d ist die maximale Schrittweite von G .

Satz 5.3: Für $n \rightarrow \infty$ gilt für alle $a \in K$ gleichmäßig im Fall (I):

$$(5.11) \quad G_n(na) = \frac{(\mu(a))^n}{s_a \cdot \sigma(s_a) \cdot \sqrt{2\pi n}} \cdot (1 + o(1))$$

und im Fall (II), wenn a zusätzlich von der Form $e + \frac{j}{n}d$ mit $j \in \mathbb{Z}$ ist:

$$(5.12) \quad G_n(na) = \frac{d \cdot (\mu(a))^n}{\sigma(s_a) \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 - e^{-ds_a})} \cdot (1 + O(\frac{1}{n})).$$

Beweis: Siehe Petrov [18], Theorem 1 und 6.

Lemma 5.4: Sei $a, b \in K$ und $f \in \{S, \sigma \cdot S, R \cdot S, \mu, 1 - e^{-dS}\}$. Es gibt eine von a, b unabhängige Konstante C mit

$$(5.13) \quad \left| \frac{f(a)}{f(b)} - 1 \right| \leq C \cdot |a - b|.$$

Beweis: Da f strikt positiv und stetig differenzierbar ist, gilt mit dem Zwischenwertsatz für eine Zwischenstelle ξ

$$\left| \frac{f(a)}{f(b)} - 1 \right| = \frac{|f'(\xi)|}{f(b)} \cdot |a - b| \leq C \cdot |a - b|. \quad \square$$

Lemma 5.5: Sei $a, b \in K$ mit $|a - b| \leq c \cdot n^{t-1}$. Dabei sei $t \in [0, 1/2)$ und $c > 0$ fest gewählt. Dann gilt gleichmäßig auf K

$$(5.14) \quad \left(\frac{\mu(a)}{\mu(b)} \right)^n = e^{n(a-b)s_b} \cdot (1 + o(n^{2t-1})).$$

Beweis:
$$\frac{d\mu(a)}{da} = \frac{dR(s_a)}{ds_a} \cdot \frac{ds_a}{da} \cdot e^{as_a} +$$

$$R(s_a) \cdot e^{as_a} \cdot \left(s_a + a \frac{ds_a}{da} \right) = \mu(a) \cdot s_a. \quad (5.6)$$

Daraus folgt
$$\frac{\mu(b) - \mu(a)}{b - a} = \mu(\xi) \cdot s_\xi \quad \text{für einen Zwischenwert } \xi, \text{ d.h.}$$

$$\frac{\mu(a)}{\mu(b)} = 1 - \frac{\mu(\xi)}{\mu(b)} \cdot \frac{s_\xi}{s_b} \cdot s_b \cdot (b - a).$$

Wendet man (5.13) auf μ und S an, so folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu(a)}{\mu(b)} \right)^n &= (1 - s_b(b-a) + o(n^{2t-2}))^n \\ &= \exp(n \cdot \log(1 - s_b(b-a) + o(n^{2t-2}))) \\ &= \exp(n \cdot (a-b)s_b + o(n^{2t-1})) \\ &= e^{n(a-b)s_b} \cdot (1 + o(n^{2t-1})), \end{aligned}$$

wobei $O(\cdot)$ nicht von a, b abhängt. $\square$

Satz 5.6: Sei $v \in (0, \infty)$ und $t \in (0, 1/2)$ fest gewählt, sei $j_n \in \mathbb{N}_0 \cap [0, n^t]$. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig für $a \in K$ und $|y| \leq v \cdot n^t$ im Fall (I)

$$(5.15) \quad \frac{G_{n-j_n}(an - y)}{G_n(an)} = \frac{e^{-ys_a}}{(R(s_a))^{j_n}} \cdot (1 + o(1))$$

und im Fall (II)

$$(5.16) \quad \frac{G_{n-j_n}(an-y)}{G_n(an)} =$$

$$\frac{\exp \left(\left(\left[\frac{n(a-e) + j_n e - y}{d} \right] - \left[\frac{n(a-e)}{d} \right] \right) d - j_n e \right) s_a}{(R(s_a))^{j_n}} \cdot (1 + o(1)).$$

Beweis: Sei $b = \frac{an-y}{n-j_n}$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ und eine kompakte

Menge $K' \subset (A_0, M)$ mit $a, b \in K'$ für alle $n > N$. Weiterhin gibt es eine Konstante c , so daß für $n \geq 2$

$$(n-j_n) \cdot |b-a| = |j_n a - y| \leq (|a| + v) n^t \leq c \cdot (n-j_n)^t \text{ ist,}$$

$$\text{also} \quad |b-a| \leq c \cdot (n-j_n)^{t-1}.$$

Zu (I):

$$\frac{G_{n-j_n}(an-y)}{G_n(an)} = \frac{G_{n-j_n}((n-j_n)b)}{G_n(an)}$$

$$(5.11) \quad = \frac{s_a \cdot \sigma(s_a)}{s_b \cdot \sigma(s_b)} \cdot \left(\frac{n}{n-j_n} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\nu(b)}{\nu(a)} \right)^{n-j_n} \cdot \frac{1+o(1)}{(\nu(a))^{j_n}}$$

$$(5.13), (5.14) \quad = e^{(n-j_n)(b-a)s_a} \cdot \nu(a)^{-j_n} \cdot (1+o(1))$$

$$(5.10) \quad = e^{-ys_a} \cdot R(s_a)^{-j_n} \cdot (1+o(1)).$$

Zu (II): Sei $a' = \left[\frac{n}{d}(a-e) \right] \frac{d}{n} + e$. Dann ist

$$(a' - e) \frac{n}{d} = \left[\frac{n}{d}(a-e) \right] \in \mathbb{Z} \quad \text{und aus (5.12) folgt}$$

$$G_n(an) = G_n(a' \cdot n) = \frac{d \cdot \nu(a')^n \cdot (1 + O(n^{-1}))}{\sigma(s_{a'}) \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 - e^{-ds_{a'}})} \quad (5.13), (5.14)$$

$$\frac{d \cdot \mu(a)^n \cdot \exp\left(\left[\frac{n}{d}(a - e)\right]d - n(a - e) s_a\right)}{\sigma(s_a) \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 - e^{-ds_a})} \cdot (1 + o(1))$$

Analog gilt $G_{n-j_n}((n - j_n)b) =$

$$\frac{d \cdot \mu(b)^{n-j_n} \cdot \exp\left(\left[\frac{n-j_n}{d}(b - e)\right]d - (n - j_n)(b - e) s_b\right)}{\sigma(s_b) \cdot \sqrt{2\pi(n - j_n)} \cdot (1 - e^{-ds_b})} \cdot (1 + o(1))$$

$$= \frac{d \cdot \mu(a)^{n-j_n} \cdot e^{(n-j_n)(b-a)s_a}}{\sigma(s_a) \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 - e^{-ds_a})}$$

(5.13), (5.14)

$$\cdot \exp\left(\left[\frac{n-j_n}{d}(b - e)\right]d - (n - j_n)(b - e) s_a\right) \cdot (1 + o(1)).$$

Setzt man diese Formeln in

$$\frac{G_{n-j_n}(an - y)}{G_n(an)} = \frac{G_{n-j_n}((n - j_n)b)}{G_n(an)}$$

ein, so folgt (5.16). $\square$

Beispiel 5.7: (i) Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig poissonverteilt mit Parameter λ , sei $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Dann gilt für fest gewähltes $a \in (0, \lambda)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ (siehe Beispiel (5.2) (i)) nach (5.16) (mit $e = 0, j_n = 0, d = 1$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \leq na - k \mid S_n \leq na) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\left[na - k\right] - [na] s_a\right) \cdot (1 + o(1)) = e^{-ks_a} = \left(\frac{a}{\lambda}\right)^k.$$

(ii) Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig normalverteilt mit Erwartung M und Varianz σ^2 . Dann gilt für fest gewähltes $a \in (-\infty, M)$ und $y \geq 0$ (siehe Beispiel 5.2 (ii)) nach (5.15):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \leq na - y \mid S_n \leq na) = e^{-ys_a} = \exp\left(-y \cdot \frac{M - a}{\sigma^2}\right). \quad \square$$

Nun wenden wir uns dem eigentlichen Problem dieses Abschnitts zu, nämlich dem Konvergenzverhalten von

$$Z_n(na) / G_n(na) \quad \text{für } a \in (A_0, M) .$$

Je nach Gestalt von G kann entweder $\mu(a) > 1$ sein für alle $a \in (A_0, M)$ (Beispiel: G auf $[0, \infty)$ konzentriert mit $G(0) \geq 1$) oder es gibt ein $\gamma \in (A_0, M)$ mit $\mu(\gamma) = 1$ und $\mu(a) < 1$ für $a \in (A_0, \gamma)$, $\mu(a) > 1$ für $a \in (\gamma, M)$.

Im Fall $a \in (A_0, M)$ und $\mu(a) < 1$ (subkritischer Fall) hat Biggins [7] bewiesen, daß $Z_n(na) = 0$ außer für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ fast sicher gilt. Dies ist auch aus (5.11) ersichtlich, da dann $EZ_n(na)$ über n summierbar ist und $Z_n(\cdot) \in \mathbb{M}_0$.

Nun zum Fall $\gamma \in (A_0, M)$ mit $\mu(\gamma) = 1$ (kritischer Fall). Wir verwenden ein Resultat, das Biggins [6] für die in (4.6) definierten nichtnegativen Martingale bewiesen hat. Da für

$$s \in (0, B) \quad \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot e^{-sx} dG(x) < \infty \quad \text{ist und} \quad s \cdot \int_0^{\infty} x \cdot e^{-sx} dG(x) < \infty$$

ist, sind die Voraussetzungen von Biggins [6], Lemma 5 erfüllt und es folgt $EW(s_\gamma) = E \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(s_\gamma) = 0$, da $\mu(\gamma) = 1$

ist. Also gilt $W(s_\gamma) = 0$ fast sicher. Daraus folgt:

Auf dem Ereignis des Nichtaussterbens von $\{Z_n(\infty)\}$ ist

$$W_n(s_\gamma) > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(\frac{1}{W_n(s_\gamma)}\right) = \infty \quad \text{fast sicher.}$$

Satz 5.8: Sei $\gamma \in (A_0, M)$ mit $\mu(\gamma) = 1$. Auf dem Ereignis des Nichtaussterbens von $\{Z_n(\infty)\}$ gilt:

$$(5.17) \quad \min_i \{z_{n,i}\} \geq n\gamma + \frac{1}{s_\gamma} \cdot \log\left(\frac{1}{W_n(s_\gamma)}\right) .$$

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} W_n(s_\gamma) &= R(s_\gamma)^{-n} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_\gamma x} dZ_n(x) \geq R(s_\gamma)^{-n} \cdot \int_{-\infty}^{n\gamma+a} e^{-s_\gamma x} dZ_n(x) \\ &\geq R(s_\gamma)^{-n} \cdot e^{-s_\gamma(n\gamma+a)} \cdot Z_n(n\gamma+a) \stackrel{(5.10)}{=} e^{-s_\gamma a} Z_n(n\gamma+a) . \end{aligned}$$

$\mu(\gamma)=1$

Wählt man nun $a = \frac{1}{s_Y} \log\left(\frac{c}{W_n(s_Y)}\right)$ mit $c \in (0,1)$,

so gilt $c \geq Z_n(n\gamma + \frac{1}{s_Y} \log\left(\frac{c}{W_n(s_Y)}\right))$.

Da $Z_n(\cdot) \in \mathbb{N}_0$ ist, folgt $Z_n(n\gamma + \frac{1}{s_Y} \log\left(\frac{c}{W_n(s_Y)}\right)) = 0$,

also $\min_i \{z_{n,i}\} > n\gamma + \frac{1}{s_Y} \log\left(\frac{c}{W_n(s_Y)}\right)$.

Da $c \in (0,1)$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Biggins [7] hat nachgewiesen, daß auf dem Ereignis des Nichtaussterbens von $\{Z_n(\infty)\}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \min_i \{z_{n,i}\} = \gamma$ fast

sicher gilt. Mit (5.17) kann man daraus folgern:

Auf dem Ereignis des Nichtaussterbens von $\{Z_n(\infty)\}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (W_n(s_Y))^{1/n} = 1 \quad \text{fast sicher.}$$

Es bleibt also noch der Fall $a \in (A_0, M)$ und $\mu(a) > 1$ (superkritischer Fall) zu untersuchen. Sei $r = A_0$ falls $\mu(a) > 1$ ist für alle $a \in (A_0, M)$ und $r = \gamma$, falls es ein $\gamma \in (A_0, M)$ gibt mit $\mu(\gamma) = 1$. Dann ist

$$(\gamma, M) = \{a \in (A_0, M) ; \mu(a) > 1\}.$$

Hier spielen die Martingale $\{W_n(s)\}$ eine wesentliche Rolle. Ist G auf einer Halbachse konzentriert, so folgt aus $E(Z_1(\infty))^r < \infty$ auch $E(W_1(s))^r < \infty$ für $s \in [0, \infty)$. Dies ist jedoch im allgemeinen Fall nicht unbedingt richtig.

Beispiel 5.9: Sei $p_n = P(Z_1(\infty) = n) = \frac{n^{-3} \cdot (\log n)^{-1,5}}{\sum_{j=2}^{\infty} j^{-3} \cdot (\log j)^{-1,5}}$

für $n \geq 2$. Gegeben $\{Z_1(\infty) = n\}$ sei

$$z_{1,1} = \dots = z_{1,n} = -(\log n + \log \log n).$$

Dann ist $E(Z_1(\infty))^r < \infty$ für $r = 2$ und wegen

$$R(s) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n \cdot n \cdot e^{s(\log n + \log \log n)}$$

ist $B = \sup \{s \in [0, \infty) ; R(s) < \infty\} = 1$. Sei nun $\alpha > 1$ und $s = 1/2$. Dann hat man

$$\begin{aligned} E(W_1(1/2))^\alpha &= (R(1/2))^{-\alpha} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} p_n \cdot n^\alpha \cdot \exp\left(\frac{\alpha}{2}(\log n + \log \log n)\right) \\ &= (R(1/2))^{-\alpha} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} p_n \cdot n^{\alpha(1,5)} \cdot (\log n)^{\alpha/2} < \infty \end{aligned}$$

für $\alpha \in (1, \frac{4}{3})$. Das Beispiel zeigt, daß die obere Grenze für α , die im folgenden Lemma angegeben wird, scharf ist. $\square$

Lemma 5.10: Sei $s \in (0, B)$. Für $\alpha \in (1, \frac{r}{1 + \frac{s}{B}(r-1)})$ gilt

$$\begin{aligned} (5.18) \quad E(W_1(s))^\alpha &\leq \frac{\alpha-1}{r-1} \cdot E(Z_1(\infty))^r + \frac{r-\alpha}{r-1} \cdot R\left(\frac{\alpha s(r-1)}{r-\alpha}\right) \\ &= c(s, \alpha) < \infty. \end{aligned}$$

Bemerkung: Falls $B = \infty$ ist, ist $s/B = 0$.

Beweis: Sei für $p_n = P(Z_1(\infty) = n) > 0$

$$G^{(n)}(x) = E(Z_1(x) \mid Z_1(\infty) = n) \quad \text{und} \quad R_n(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} dG^{(n)}(x).$$

Sei $g_n(x) = n^{(r-1)(1-x/\xi)} \cdot R_n(x)$ für ein $\xi \in (0, B)$ und $x \in [0, \xi]$. Falls $G^{(n)}$ in einem Punkt konzentriert ist,

gilt $(R'_n(x) / R_n(x))^2 = R''_n(x) / R_n(x)$, andernfalls folgt

aus (5.2): $(R'_n(x) / R_n(x))^2 < R''_n(x) / R_n(x)$ für $x \in (0, B)$.

Zweimaliges Differenzieren ergibt

$$\begin{aligned} g''_n(x) &= n^{(r-1)(1-x/\xi)} \cdot R_n(x) \cdot \left(\left(\frac{r-1}{\xi} \cdot \log n \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cdot \frac{r-1}{\xi} \cdot (\log n) \cdot \frac{R'_n(x)}{R_n(x)} + \frac{R''_n(x)}{R_n(x)} \right) \geq \end{aligned}$$

$$n^{(r-1)(1-x/\xi)} \cdot R_n(x) \cdot \left(\frac{r-1}{\xi} \cdot \log n - \frac{R'_n(x)}{R_n(x)} \right)^2 \geq 0$$

Also ist g_n auf $(0, \xi]$ konvex und mit der Stetigkeit in 0

folgt $g_n(x) \leq g_n(0) \cdot (1 - \frac{x}{\xi}) + g_n(\xi) \cdot \frac{x}{\xi} = n^r (1 - \frac{x}{\xi}) + R_n(\xi) \cdot \frac{x}{\xi}$.

Für $\alpha \in (1, \frac{r}{1 + \frac{s}{B}(r-1)})$ gibt es ein $\bar{s} \in (s, B)$ mit

$$\alpha = \frac{r}{1 + \frac{s}{B}(r-1)}. \text{ Dann ist } \alpha s = \frac{rs}{1 + \frac{s}{B}(r-1)} < \bar{s} \text{ und}$$

$$\alpha - 1 = (r-1)(1 - \frac{\alpha s}{\bar{s}}). \text{ Damit erhält man}$$

$$R(s)^\alpha \cdot E(W_1(s))^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot E\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} dZ_1(x)\right)^\alpha \mid Z_1(\infty) = n\right)$$

$$\stackrel{\substack{\leq \\ \text{Jensen} \\ \text{UGL}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot n^{\alpha-1} \cdot R_n(s\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot g_n(s\alpha)$$

$$\leq \left(1 - \frac{s\alpha}{\bar{s}}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot n^r + \frac{s\alpha}{\bar{s}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot R_n(\bar{s})$$

$$= \left(1 - \frac{s\alpha}{\bar{s}}\right) \cdot E(Z_1(\infty))^r + \frac{s\alpha}{\bar{s}} \cdot R(\bar{s}) = c(s, \alpha) < \infty. \square$$

Für $a \in (r, M)$ wird

$$(5.19) \quad \beta(a) = \begin{cases} \min\left(\frac{S(a - \frac{\log \mu(a)}{s_a})}{s_a}, \frac{r}{1 + \frac{s_a}{B}(r-1)}\right) & \text{falls } a - (\log \mu(a))/s_a > A_0 \text{ ist} \\ r / (1 + \frac{s_a}{B}(r-1)) & \text{falls } a - (\log \mu(a))/s_a \leq A_0 \text{ ist} \end{cases}$$

definiert. Da S streng monoton fällt, ist $\beta(a) > 1$. Wegen

$$\frac{d}{da} \left(a - \frac{\log \mu(a)}{s_a}\right) = - \frac{\log \mu(a)}{s_a^2 \cdot \sigma'(s_a)} < 0 \text{ ist } a - \frac{\log \mu(a)}{s_a}$$

streng monoton fallend. Es gibt also höchstens eine Stelle

$$\bar{a} \in (r, M) \text{ mit } \bar{a} - \frac{\log \mu(\bar{a})}{s_{\bar{a}}} = A_0. \text{ Wegen}$$

$$(5.20) \quad \frac{r}{1 + \frac{s_a}{B}(r-1)} < \frac{B}{s_a} \quad (=) \quad \lim_{\hat{a} \rightarrow \hat{a}} \frac{s(\hat{a} - \frac{\log \mu(\hat{a})}{s_{\hat{a}}})}{s_a}$$

ist $\beta(\cdot)$ stetig. $\beta(\cdot)$ ist steigend und falls es ein $\gamma \in (A_0, M)$ gibt mit $\mu(\gamma) = 1$, gilt $\lim_{a \rightarrow \gamma} \beta(a) = 1$.

Lemma 5.11: Sei $a \in (r, M)$ und $\alpha \in (1, \beta(a))$. Dann ist

$\alpha \cdot s_a \in (s_a, B)$ und

$$(5.21) \quad \rho(a) = \frac{R(\alpha \cdot s_a)}{(R(s_a))^\alpha} < 1.$$

Beweis: $s_a < \alpha \cdot s_a < B$ ist wegen (5.20) klar. Aus (5.10)

$$\text{folgt} \quad \mu(S^{-1}(\alpha \cdot s_a)) = R(\alpha \cdot s_a) \cdot e^{S^{-1}(\alpha \cdot s_a) \cdot \alpha \cdot s_a}$$

$$\leq R(s_a) \cdot e^{S^{-1}(\alpha \cdot s_a) \cdot s_a} \quad (5.9)$$

$$\text{und} \quad \rho(a) \leq \frac{e^{S^{-1}(\alpha \cdot s_a) \cdot s_a (1 - \alpha)}}{R(s_a)^{\alpha-1}} = \left(\frac{e^{(a - S^{-1}(\alpha \cdot s_a)) s_a}}{\mu(a)} \right)^{\alpha-1}.$$

Da S^{-1} nach (5.3) streng fallend ist, folgt nach (5.19) im

Fall $a - \frac{\log \mu(a)}{s_a} > A_0$:

$$\frac{e^{(a - S^{-1}(\alpha \cdot s_a)) s_a}}{\mu(a)} < \frac{e^{S(a - \frac{\log \mu(a)}{s_a})}}{\mu(a)} \exp\left((a - S^{-1}\left(\frac{s(a - \frac{\log \mu(a)}{s_a})}{s_a}\right)) s_a\right)$$

$$= 1.$$

Im Fall $a - \frac{\log \mu(a)}{s_a} \leq A_0$ ist $A_0 \in \mathbb{R}$ und

$$\frac{e^{(a - S^{-1}(\alpha \cdot s_a)) s_a}}{\mu(a)} < \frac{e^{(a - S^{-1}(\frac{\alpha \cdot s_a + B}{2})) s_a}}{\mu(a)} \quad (5.6), (5.3)$$

$$\leq \lim_{s \rightarrow B} \frac{e^{(a - S^{-1}(\frac{s+B}{2})) s_a}}{\mu(a)}$$

$$(5.5) \quad \frac{e^{(a - A_0)s_a}}{\mu(a)} \leq \frac{\exp\left(\frac{\log \mu(a)}{s_a} s_a\right)}{\mu(a)} = 1. \quad \square$$

Satz 5.12: Sei $a \in (r, M)$ und $\alpha \in (1, \rho(a))$. Dann gilt

$$(5.22) \quad E | W(s_a) - W_k(s_a) |^\alpha \leq \frac{4(c(s_a, \alpha) + 1)}{1 - \rho(a)} \cdot \rho(a)^k,$$

also insbesondere $\lim_{k \rightarrow \infty} W_k(s_a) = W(s_a)$ fast sicher und im α -ten Mittel.

Beweis: Seien

$$(5.23) \quad \{i^{Z_n, j}\} \text{ die Atome von } i^{Z_n}.$$

$$\begin{aligned} E | W_n(s_a) - W_{n-1}(s_a) |^\alpha &= E E(R(s_a)^{-(n-1)\alpha} \cdot \left| \sum_i e^{-s_a z_{n-1, i}} \right. \\ &\quad \cdot (R(s_a)^{-1} \cdot \sum_j e^{-s_a(i^{Z_n, j} - z_{n-1, i})} - 1) \left. \right|^\alpha \Big| \mathcal{F}_{n-1}) \\ &\stackrel{(1.1)}{\leq} 2 \cdot R(s_a)^{-(n-1)\alpha} \cdot E \sum_i e^{-\alpha s_a z_{n-1, i}} \cdot E | W_1(s_a) - 1 |^\alpha \\ &\stackrel{(5.21)}{\leq} 2 (E(W_1(s_a))^\alpha + 1) \cdot \rho(a)^{n-1} \\ &\stackrel{(5.18)}{\leq} 2(c(s_a, \alpha) + 1) \cdot \rho(a)^{n-1}. \end{aligned}$$

Mit der Martingaleigenschaft von $\{W_n(s_a)\}$ folgt

$$\begin{aligned} E | W_n(s_a) - W_k(s_a) |^\alpha &\stackrel{(1.1)}{\leq} 2 \cdot \sum_{l=k+1}^n E | W_l(s_a) - W_{l-1}(s_a) |^\alpha \\ &\leq \frac{4(c(s_a, \alpha) + 1)}{1 - \rho(a)} \cdot \rho(a)^k. \end{aligned}$$

Nach dem Cauchy - Kriterium konvergiert $W_k(s_a)$ im α -ten Mittel gegen $W(s_a)$. Mit dem Fatou'schen Lemma folgt (5.22). Da $\rho(a)^k$ summierbar ist, gilt auch fast sichere Konvergenz.

□

Satz 5.13: Sei $a \in (r, M)$ und $\alpha \in (1, \beta(a))$. Sei $b_n \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\tau} b_n = 0$ für ein $\tau \in (0, 1)$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n(na + b_n)}{G_n(na + b_n)} = W(s_a)$$

fast sicher und im α -ten Mittel.

Beweis: Sei $t \in (0, 1/2)$ mit $\tau + t < 1$, $k_n = [nt]$ und

$$X_n = \left| \frac{Z_n(na + b_n)}{G_n(na + b_n)} - \frac{(G_{n-k_n} * Z_{k_n})(na + b_n)}{G_n(na + b_n)} \right|.$$

Wir weisen zuerst nach, daß

$$(5.24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0 \quad \text{fast sicher und im } \alpha\text{-ten Mittel gilt.}$$

Es genügt, $\sum_{n=N}^{\infty} EX_n^{\alpha} < \infty$ für ein $N \in \mathbb{N}$ nachzuweisen.

Da $\alpha < \beta(a)$ und β in a stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $\alpha < \beta(x)$ ist für alle $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ und $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset (r, M)$. Sei $a_n = a + n^{-1}b_n$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ist,

gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq N$ stets $a_n \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ gilt. Nach (5.21), (5.18), sind $\rho(\cdot)$, $c(S(\cdot), \alpha)$ stetig und

$$1 > \rho = \max_{x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]} \rho(x) \quad \text{sowie} \quad \infty > \max_{x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]} c(s_x, \alpha).$$

Sei $n \geq N$, $b \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ und $l \in \{k_n+1, k_n+2, \dots, n\}$.

$$E \left| \frac{(G_{n-1} * Z_1)(nb)}{G_n(nb)} - \frac{(G_{n-1+1} * Z_{1-1})(nb)}{G_n(nb)} \right|^{\alpha} \quad (5.23)$$

$$G_n(nb)^{-\alpha} \cdot E \left(\left| \sum_i \left(\sum_j G_{n-1}(nb - i z_{1,j}) - G_{n-1+1}(nb - z_{1-1,i}) \right) \right|^{\alpha} \middle| \mathcal{F}_{1-1} \right)$$

$$\leq 2 \cdot G_n(nb)^{-\alpha} \cdot E \sum_i E \left(\left(\sum_j G_{n-1}(nb - i z_{1,j}) \right)^{\alpha} + (G_{n-1+1}(nb - z_{1-1,i}))^{\alpha} \middle| \mathcal{F}_{1-1} \right) \quad (1.1)$$

$$(3.3) \quad \leq 2 \cdot G_n(nb)^{-\alpha} \cdot E \sum_i R(s_b)^{\alpha(n-1+1)} \cdot e^{\alpha s_b(nb-z_{1-1,i})} \\ \cdot E \left((R(s_b)^{-1} \cdot \sum_j e^{-s_b(i z_{1,j} - z_{1-1,i})})^{\alpha} + 1 \mid \mathcal{F}_{1-1} \right)$$

$$\leq \text{const} \cdot R(s_b)^{\alpha(n-1+1)} \cdot e^{\alpha s_b nb} \cdot R(\alpha s_b)^{1-1} \\ (5.11) \text{ oder} \\ (5.12), (5.16) \quad \cdot E (W_1(s_b)^{\alpha} + 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \nu(b)^n \right)^{-\alpha}$$

$$\leq \text{const} \cdot \rho(b)^{1-1} \cdot (c(s_b, \alpha) + 1) \cdot n^{\alpha/2} \leq C \cdot n^{\alpha/2} \cdot \rho^{1-1}, \\ (5.10), (5.18) \\ (5.21)$$

wobei C, ρ nur von den Intervallgrenzen $a-\epsilon, a+\epsilon$ abhängen.

Daraus folgt für $n \geq N$: $E X_n^{\alpha} \leq$ Jensen-UGL

$$n^{\alpha-1} \cdot \sum_{l=k_n+1}^n E \left| \frac{(G_{n-1} * Z_1)(na + b_n)}{G_n(na + b_n)} - \frac{(G_{n-1+1} * Z_{1-1})(na + b_n)}{G_n(na + b_n)} \right|^{\alpha} \\ \leq \frac{C \cdot n^{\alpha-1+\alpha/2} \cdot \rho^k n}{1 - \rho}$$

Aus $\sum_{n=1}^{\infty} E X_n^{\alpha} < \infty$ folgt (5.24).

Nun wird gezeigt, daß es $v, w \in \mathbb{R}$ gibt mit $v < 0 < w$ und

$$(5.25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| W_{k_n}(s_a) - R(s_a)^{-k_n} \int_{v k_n}^{w k_n} e^{-s_a y} dZ_{k_n}(y) \right| = 0$$

sowie

$$(5.26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(G_{n-k_n} * Z_{k_n})(na + b_n)}{G_n(na + b_n)} - \int_{v k_n}^{w k_n} \frac{G_{n-k_n}(na + b_n - y)}{G_n(na + b_n)} dZ_{k_n}(y) \right| = 0$$

jeweils fast sicher und im α -ten Mittel.

Sei jetzt $N \in \mathbb{N}$ so groß, daß für alle $n \geq N$

$a + n^{-1}b_n \in [a-\epsilon/2, a+\epsilon/2]$ ist. Wir setzen

$$c = \log \left(\frac{\max_{x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]} R(s_x)}{\min_{x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]} R(s_x)} \right) \quad \text{und}$$

$v = -(c + \epsilon)/(s_{a-\epsilon} - s_{a-\epsilon/2})$. Sei $b \in [a-\epsilon/2, a+\epsilon/2]$.

$$E \left(\int_{-\infty}^{vk_n} \frac{G_{n-k_n}(nb-y)}{G_n(nb)} dZ_{k_n}(y) \right)^\alpha \leq \quad (5.11) \text{ oder } (5.12), (5.16) \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \text{const} \cdot E \left(\int_{-\infty}^{vk_n} \frac{R(s_b)^{n-k_n} e^{s_b(nb-y)}}{R(s_b)^n e^{nbs_b}} \cdot \sqrt{n} dZ_{k_n}(y) \right)^\alpha \\ &= \text{const} \cdot n^{\alpha/2} \cdot E \left(R(s_b)^{-k_n} \cdot \int_{-\infty}^{vk_n} e^{-s_b y} dZ_{k_n}(y) \right)^\alpha \\ &\leq \frac{\text{const} \cdot n^{\alpha/2} \cdot e^{\alpha(s_{a-\epsilon} - s_b)vk_n}}{R(s_b)^{\alpha k_n}} \cdot E \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_{a-\epsilon} y} dZ_{k_n}(y) \right)^\alpha \\ &\text{S fallend} \\ &\leq C \cdot n^{\alpha/2} \cdot e^{\alpha(s_{a-\epsilon} - s_{a-\epsilon/2})vk_n} \cdot R(s_{a-\epsilon})^{\alpha k_n} \cdot R(s_b)^{-\alpha k_n} \\ (5.22) &\leq C \cdot n^{\alpha/2} \cdot e^{-\alpha \epsilon k_n} \quad \text{ist summierbar über } n. \end{aligned}$$

Setzt man $w = (c + \epsilon)/(s_{a+\epsilon/2} - s_{a+\epsilon})$, so erhält man analog

$$\begin{aligned} & E \left(\int_{wk_n}^{\infty} \frac{G_{n-k_n}(nb-y)}{G_n(nb)} dZ_{k_n}(y) \right)^\alpha \\ &\leq \text{const} \cdot n^{\alpha/2} \cdot E \left(R(s_b)^{-k_n} \cdot \int_{wk_n}^{\infty} e^{-s_b y} dZ_{k_n}(y) \right)^\alpha \\ &\leq C \cdot n^{\alpha/2} \cdot e^{\alpha(s_{a+\epsilon} - s_b)wk_n + \alpha c k_n} \leq C \cdot n^{\alpha/2} \cdot e^{-\alpha \epsilon k_n}. \end{aligned}$$

Wegen (5.24), (5.26), (5.25) und (5.22) genügt es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{v_k n}^{w_k n} \left| \frac{G_{n-k_n}(na + b_n - y)}{G_n(na + b_n)} - \frac{e^{-s_a y}}{R(s_a)^{k_n}} \right| dz_{k_n}(y) = 0$$

fast sicher und im α -ten Mittel nachzuweisen. Sei nun $N \in \mathbb{N}$ so groß, daß für alle $n \geq N$ $a + n^{-1}(b_n - w_k n) \in [a - \epsilon, a + \epsilon]$ sowie $a + n^{-1}(b_n - v_k n) \in [a - \epsilon, a + \epsilon]$ gilt. Für $n \geq N$ gilt gleichmäßig für alle $y \in [v_k n, w_k n]$ im Fall (I) nach (5.15):

$$\frac{G_{n-k_n}(an + b_n - y)}{G_n(an + b_n)} = \frac{e^{-yS(a + b_n/n)}}{R(S(a + b_n/n))^{k_n}} \cdot (1 + o(1)) \quad (5.13)$$

$$\frac{e^{-ys_a} \cdot (1 + O(n^{\tau+t-1}))}{R(s_a)^{k_n} \cdot (1 + O(n^{\tau+t-1}))} \cdot (1 + o(1)) = \frac{e^{-ys_a}}{R(s_a)^{k_n}} \cdot (1 + o(1))$$

Daraus folgt

$$\int_{v_k n}^{w_k n} \left| \frac{G_{n-k_n}(an + b_n - y)}{G_n(an + b_n)} - \frac{e^{-s_a y}}{R(s_a)^{k_n}} \right| dz_{k_n}(y) =$$

$$o(1) \cdot R(s_a)^{-k_n} \cdot \int_{v_k n}^{w_k n} e^{-s_a y} dz_{k_n}(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

fast sicher und im α -ten Mittel nach (5.25), (5.22).

Der Fall (II) wird analog mit (5.16) bewiesen. $\square$

Satz 5.14: Sei $a \in (I, M)$ und $\alpha \in (1, \beta(a))$.

$W(\cdot)$ ist in a im α -ten Mittel stetig.

Beweis: Sei ϵ wie im Beweis von Satz 5.13 gewählt. Wegen (5.22) gibt es ein $\rho < 1$ und $C < \infty$ mit

$$\sup_{a' \in [a - \epsilon, a + \epsilon]} E|W(s_{a'}) - W_k(s_{a'})|^\alpha \leq C \cdot \rho^k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Es genügt also, für alle Folgen

$\{a_n\} \subset [a - \epsilon, a + \epsilon]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ nachzuweisen, daß

$\lim_{n \rightarrow \infty} E |W_k(s_{a_n}) - W_k(s_a)|^\alpha = 0$ gilt. Da

$$|W_k(s_{a_n}) - W_k(s_a)|^\alpha \leq W_k(s_a)^\alpha + \max_{a' \in [a-\epsilon, a+\epsilon]} R(s_{a'})^{-k} \\ \cdot 2^{\alpha-1} \cdot \left(\left(\int_{-\infty}^0 e^{-s_{a-\epsilon}y} dZ_k(y) \right)^\alpha + \left(\int_0^\infty e^{-s_{a+\epsilon}y} dZ_k(y) \right)^\alpha \right)$$

P - integrierbar ist, folgt mit der Stetigkeit von $s_a, R(s_a)$ nach dem Satz von Lebesgue die Behauptung. $\square$

6. Compound - Poisson Konvergenz auf Galton - Watson Bäumen

Wir betrachten in diesem Abschnitt eine Folge von gekoppelten Branching Random Walks $\{\mathcal{Z}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Jedes $\mathcal{Z}^{(n)}$ erfülle die Voraussetzungen, die in Abschnitt 0 gemacht wurden. Seien $z_{k,i}^{(n)}$ die Positionen der Individuen der k -ten Generation von $\mathcal{Z}^{(n)}$, $z_k^{(n)}(x) = \sum_i 1_{(-\infty, x]}(z_{k,i}^{(n)})$ und $G^{(n)}(x) = E z_1^{(n)}(x)$. Weiterhin sei $1 \geq q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq 0$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} n q_n = \lambda \in (0, \infty)$, $p_n = 1 - q_n$ und H die Verteilungsfunktion einer auf $[0, \infty)$ konzentrierten Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Die $\mathcal{Z}^{(n)}$ sollen so gekoppelt sein, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$

$$z_k^{(n)}(\infty) = z_k^{(n+1)}(\infty) \quad \text{und} \quad z_k^{(n)}(0) \leq z_k^{(n+1)}(0)$$

und
$$G^{(n)}(x) = m \cdot (p_n 1_{[0, \infty)}(x) + q_n H(x))$$

mit $m = E z_1^{(n)}(\infty) > 1$ gilt. Es gebe ein $r \in (1, 2]$ mit $E(z_1^{(n)}(\infty))^r < \infty$.

Beispiel 6.1: Sei X_t , $t \in [0, \infty)$ ein altersabhängiger Verzweigungsprozeß. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Individuum k Nachkommen erzeugt, sei mit a_k bezeichnet; es sei $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k = m > 1$ und $\sum_{k=1}^{\infty} k^r a_k < \infty$ für ein $r \in (1, 2]$. Die Verteilungsfunktion L der Lebensdauer der Individuen sei stetig mit $L(0) = 0$ und t_n sei durch $L(t_n) = 1 - \lambda/n$ gegeben, falls $\lambda/n \leq 1$ ist beziehungsweise $t_n = 0$ sonst. $\mathcal{Z}^{(n)}$ wird dadurch definiert, daß jedes Individuum der Generation $k \in \mathbb{N}$ in der Position seines Vaters $z_{k-1,i}^{(n)}$ bleibt, falls seine Lebensdauer kleiner oder gleich t_n ist und die

Position $z_{k-1,i}^{(n)} + 1$ einnimmt, falls es länger als t_n lebt.
Dann ist $z_k^{(n)}(\infty) = z_k^{(n+1)}(\infty)$, $z_k^{(n)}(0) \leq z_k^{(n+1)}(0)$,
für genügend große n ist

$$G^{(n)}(x) = m \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) 1_{[0,\infty)}(x) + \frac{\lambda}{n} \cdot 1_{[1,\infty)}(x) \right)$$

und $z_k^{(n)}(j)$ ist die Anzahl der Individuen der k -ten Generation, die höchstens j Vorfahren in den Generationen $1, 2, \dots, k$ besitzen, die länger als t_n gelebt haben.

Lemma 6.2: Sei $k_n \in \mathbb{N}_0$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} k_n = 0$. Dann gilt

$$(6.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m^{-(n-k_n)} \cdot G_{n-k_n}^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^j}{j!} \cdot H_j(x),$$

wobei $G_{n-k_n}^{(n)} = (G^{(n)})^{*(n-k_n)}$ und $H_k = H^{*k}$ ist.

$$\text{Beweis: } m^{-(n-k_n)} \cdot G_{n-k_n}^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n-k_n} \binom{n-k_n}{j} \cdot p_n^{n-k_n-j} \cdot q_n^j \cdot H_j(x).$$

Aus dem Poisson - Konvergenzsatz folgt

$$\binom{n-k_n}{j} \cdot p_n^{n-k_n-j} \cdot q_n^j = \frac{j!}{j!} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{n-k_n} \cdot p_n^{-k_n} \cdot \binom{n}{j} \cdot p_n^{n-j} \cdot q_n^j$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \cdot 1 \cdot \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}.$$

Da $\sum_{j=0}^{\infty} 1 \cdot H_j(x) < \infty$ ist, folgt (6.1) mit dem Satz von der dominierten Konvergenz. $\square$

Satz 6.3: Für die Folge $\{Z^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ von gekoppelten Branching Random Walks gilt

$$(6.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m^{-n} \cdot Z_n^{(n)}(a) = W \cdot \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^l}{l!} \cdot H_l(a)$$

fast sicher, wobei $W = \lim_{k \rightarrow \infty} m^{-k} \cdot Z_k^{(n)}(\infty)$ ist.

Beweis: Der Fall $a < 0$ ist trivial. Sei nun $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $k_n = [n^{1/3}]$. Da

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} m^{-1} G^{(n)}(0) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$$

ist, folgt aus (1.3):

$$\begin{aligned} E \left| \frac{Z_n^{(n)}(a)}{G_n^{(n)}(a)} - \frac{(G_{n-k_n}^{(n)} * Z_{k_n}^{(n)})(a)}{G_n^{(n)}(a)} \right| &\leq \text{const.} (G^{(n)}(0))^{-(1-\frac{1}{r})k_n} \\ &\leq \text{const.} (m(1-\epsilon))^{-(1-\frac{1}{r})k_n} \end{aligned}$$

für alle n genügend groß, wobei $m(1-\epsilon) > 1$ sei. Da diese Schranke über n summierbar ist, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Z_n^{(n)}(a)}{G_n^{(n)}(a)} - \frac{(G_{n-k_n}^{(n)} * Z_{k_n}^{(n)})(a)}{G_n^{(n)}(a)} \right| = 0$$

fast sicher. Es gilt

$$\begin{aligned} (6.3) \quad Z_{k_n}^{(n)}(0) \cdot \frac{G_{n-k_n}^{(n)}(a)}{G_n^{(n)}(a)} &\leq \frac{(G_{n-k_n}^{(n)} * Z_{k_n}^{(n)})(a)}{G_n^{(n)}(a)} \leq \\ &\frac{G_{n-k_n}^{(n)}(a)}{G_n^{(n)}(a)} \cdot Z_{k_n}^{(n)}(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} W \end{aligned}$$

fast sicher wegen (6.1). Da $n \in \{k_n^3, k_n^3+1, \dots, (k_n+1)^3-1\}$

ist, gilt wegen der Koppelung

$$0 \leq Z_{k_n}^{(n)}(\infty) - Z_{k_n}^{(n)}(0) \leq Z_{k_n}^{(k_n^3)}(\infty) - Z_{k_n}^{(k_n^3)}(0),$$

wobei diese Schranke nur von k_n abhängt.

$$E \left(\frac{Z_k^{(k^3)}(\infty) - Z_k^{(k^3)}(0)}{m^k} \right) = 1 - \left(\frac{G^{(k^3)}(0)}{m} \right)^k \leq 1 - (p_{k^3})^k$$

$= O(k^{-2})$ ist summierbar über k , woraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{Z_{k_n}^{(n)}(\infty) - Z_{k_n}^{(n)}(0)}{m_{k_n}} \right) = 0$$

fast sicher folgt, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_{k_n}^{(n)}(0) \cdot \frac{G_{n-k_n}^{(n)}(a)}{G_n^{(n)}(a)} = W$$

fast sicher wegen (6.1). Aus (6.3) und (6.1) folgt dann die Behauptung. $\square$

Wendet man (6.2) auf das Beispiel 6.1 an, so erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m^{-n} \cdot Z_n^{(n)}(j) = W \cdot \sum_{l=0}^j e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^l}{l!}$$

fast sicher. Das ist eine Verallgemeinerung des Ergebnisses von Moncayo [17].

7. Verzeichnis der wichtigsten verwendeten Symbole

Bezeichnung	Bedeutung	Definition Seite
Z_1	Punktprozeß, der die Positionen der Nachfahren eines Individuums in Position 0 angibt	1
$\mathcal{F}_n$	σ -Algebra, die von den Geburten der Generationen $0, 1, \dots, n$ erzeugt wird	1
$z_{n,i}$	Positionen der Individuen der n-ten Generation	1
iZ_{n+1}	Punktprozeß, der die Positionen der Nachfahren eines Individuums in Position $z_{n,i}$ angibt	1
$Z_n(x)$	$\sum_1 1_{(-\infty, x]}(z_{n,i})$	2
r	$\in (1, 2]$ mit $E(Z_1(\infty))^r < \infty$	3
m	erwartete Nachkommensanzahl eines Individuums	3
$G(x)$	$E Z_1(x)$	3
G_n	G^{*n} , $G_0 = 1_{[0, \infty)}$	3
W^0	$\lim_{n \rightarrow \infty} G(0)^{-n} Z_n(0)$	6
x_0	$\sup \{x; G(x) = G(0)\}$	9
$[x]$	größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist	11
$R(\lambda)$	$\int e^{-\lambda x} dG(x)$	12
$\mathcal{M}$	$\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \cdot 1_{(-\infty, 0)} \equiv 0, f \text{ ist von beschränkter Variation auf jedem endlichen Intervall, } f \text{ ist rechtsstetig}\}$	18
F, F_n	Faltungsinverse zu G, G_n	18
$V_f(x)$	totale Variation von f in $(-\infty, x]$	18

Bezeichnung	Bedeutung	Definition Seite
$U_n(a)$	$(F_n * Z_n)(a)$	21
$U(a)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(a)$	21
$W_n(s)$	$R(s)^{-n} \int e^{-sx} dZ_n(x)$	23
$W(s)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(s)$	23
M	$m^{-1} \int x dG(x)$	25
B	$\sup \{s \in [0, \infty); \int e^{-sx} dG(x) < \infty\}$	25
$\sigma^2(s)$	$\frac{d}{ds} \left(\frac{R'(s)}{R(s)} \right)$	25
A_0	$\lim_{s \rightarrow B} \left(- \frac{R'(s)}{R(s)} \right)$	26
$S(a) = s_a$	Umkehrfunktion von $-\frac{R'(s)}{R(s)}$	26
$\mu(a)$	$\inf \{e^{as} \cdot R(s); s \in [0, \infty)\}$	26
r	$\begin{cases} A_0 & \text{falls } \mu(a) > 1 \text{ für alle } a \in (A_0, M) \\ \gamma & \text{falls } \mu(\gamma) = 1 \text{ mit } \gamma \in (A_0, M) \end{cases}$	32
$\beta(a)$	Schranke für die Potenz α	34

8. Zusammenfassung

Bei einem Branching Random Walk $\mathcal{Z}$ erzeugt ein in 0 befindlicher Urahn Nachkommen der ersten Generation, deren Positionen in $\mathbb{R}$ durch einen Punktprozeß Z_1 gegeben sind. Jedes Individuum erzeugt unabhängig von den anderen und der Vergangenheit Nachkommen nach der gleichen Gesetzmäßigkeit bezüglich seiner Position.

Sei $Z_n(x)$ die Anzahl der Individuen der n -ten Generation, deren Position kleiner oder gleich x ist, sei $E(Z_1(\cdot))^r < \infty$ für ein $r \in (1, 2]$ und $G(\cdot) = EZ_1(\cdot)$.

Ist G auf $[0, \infty)$ konzentriert mit $G(0) > 1$, so gilt für alle Folgen $\{a_n\}$ mit $a_n/n \rightarrow 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(a_n)/G^{*n}(a_n) = W^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(0)/G(0)^n$$

im r -ten Mittel. Unter schwachen zusätzlichen Voraussetzungen gilt auch die fast sichere Konvergenz. Weiterhin gibt es eine Funktion F mit $F * G = 1_{[0, \infty)}$ und $(F^{*n} * Z_n)(a)$ ist fast sicher und im r -ten Mittel konvergent.

Setzt man anstatt G auf $[0, \infty)$ konzentriert nur $R(s) = \int e^{-sx} dG(x) < \infty$ für ein $s > 0$ und $m = G(\infty) > 1$ voraus, dann gibt es ein $\tau < m^{-1} \cdot \int x dG(x)$, so daß für alle $a \in (\tau, m^{-1} \cdot \int x dG(x))$ gilt: Es gibt ein $\alpha = \alpha(a) > 1$ und $s_a > 0$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n(na + b_n)}{G^{*n}(na + b_n)} = W(s_a) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(s_a)^{-n} \int e^{-s_a x} dZ_n(x)$$

fast sicher und im α -ten Mittel, wenn $b_n/n^\tau \rightarrow 0$ für ein $\tau \in (0, 1)$.

Schließlich wird für eine Folge von geeignet gekoppelten Branching Random Walks $\mathcal{Z}^{(n)}$ ein Compound - Poisson Konvergenzsatz bewiesen.

9. Literatur

- [1] S. Asmussen, N. Kaplan, Branching Random Walks I, Stoch. Proc. Appl. 4 (1976), 1 - 13
- [2] S. Asmussen, N. Kaplan, Branching Random Walks II, Stoch. Proc. Appl. 4 (1976), 15 - 31
- [3] K. B. Athreya, P. E. Ney, Branching Processes, Springer, Berlin (1972)
- [4] B. von Bahr, On the Convergence of Moments in the Central Limit Theorem, Ann. Math. Statist. 36 (1965), 808 - 818
- [5] B. von Bahr, C. - G. Esseen, Inequalities for the r -th absolute Moment of a Sum of Random Variables, $1 \leq r \leq 2$, Ann. Math. Statist. 36 (1965), 299 - 303
- [6] J. D. Biggins, Martingale Convergence in the Branching Random Walk, J. Appl. Prob. 14 (1977), 25 - 37
- [7] J. D. Biggins, Chernoff's Theorem in the Branching Random Walk, J. Appl. Prob. 14 (1977), 630 - 636
- [8] M. D. Bramson, Minimal Displacement of Branching Random Walk, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie u. verw. Geb. 45 (1978), 89 - 108
- [9] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 2, Wiley, New York (1971)
- [10] I. M. Gelfand, D. A. Raikow, G. E. Schilow, Kommutative normierte Algebren, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1964)
- [11] L. G. Gorostiza, A. R. Moncayo, Invariance Principle for Random Processes on Galton - Watson Trees, J. Math. Anal. Appl. 60 (1977), 461 - 476
- [12] T. E. Harris, The Theory of Branching Processes, Springer, Berlin (1963)
- [13] P. Jagers, Branching Processes with Biological Applications, Wiley, New York (1975)

- [14] H. Kesten, P. B. Stigum, Limit Theorems for decomposable multi - dimensional Galton - Watson Processes, J. Math. Anal. Appl. 17 (1967), 309 - 338
- [15] J. F. C. Kingman, The first Birth Problem for an age - dependent Branching Process, Ann. Prob. 3 (1975), 790 - 801
- [16] M. Loève, Probability Theory II, 4th ed., Springer, Berlin (1978)
- [17] A. R. Moncayo, Poisson Convergence and Family Trees, Ann. Prob. 3, No. 6 (1975), 1059 - 1061
- [18] V. V. Petrov, On the Probabilities of large Deviations of Sums of independent Random Variables, Theor. Probab. Appl. 10, No. 2 (1965), 287 - 298
- [19] D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton University Press, Princeton (1946)

Lebenslauf

Norbert Lenz

geboren am

4. 11. 1951 in Königshofen an der Heide als Sohn des technischen Angestellten Georg Lenz und seiner Frau Irmgard, geborene Leicht

April 1958 - Besuch der Volksschule Magstadt

April 1962

April 1962 Eintritt ins Goldberggymnasium Sindelfingen

Sept. 1963 - Besuch der Highland High School, New York, USA

Nov. 1964

Jan. 1967 - Besuch der Deutschen Schule Paris

Nov. 1968

Juni 1970 Abitur am Gutenberggymnasium Mainz

Juli 1970 - Wehrdienst

Okt. 1971

Okt. 1971 - Beginn des Mathematikstudiums an der Johannes Gutenberg - Universität Mainz

Okt. 1973 Diplom - Vorprüfung in Mathematik

Juli 1977 Diplomprüfung in Mathematik

(Thema der Diplomarbeit: Wachstumsverhalten Markoffscher Populationen)

Jan. 1978 - Systemprogrammierer im Labor "Digitale Systeme"

März 1979 der Grundlagenentwicklung bei AEG Telefunken in Backnang

seit Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich

April 1979 Mathematik der Johannes Gutenberg - Universität in Mainz

D. GRÄBNER

DISSERTATIONS U. OFFSETDRUCKEREI



Gotenstraße 3
8602 Altendorf bei Bamberg
Telefon: 09545 / 8791